Analiza matematică este o simfonie coerentă a infinitului.

David Hilbert

That Cauchy had so much trouble proving the mean value theorem or coming to terms with the notion of uniform convergence should alert us to the fact that these ideas are not easily assimilated. The student needs time with them. The highly refined proofs that we know today leave the mistaken impression that the road of discovery in mathematics is straight and sure. It is not. Experimentation and misunderstanding have been essential components in the growth of mathematics.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina vii.

MISCELLANEA

ELEMENTE DE LOGICĂ

CALCULUL CU PROPOZIŢII

Propoziţia, adevărul şi falsul - noţiuni primare
Principalii operatori logici

Din punct de vedere logic o teorie ştiinţifică este un sistem de propoziţii (enunţuri, legi, afirmaţii) adevărate sau considerate altfel. Logica nu se ocupă cu definirea noţiunii de propoziţie şi nici a adevărului sau falsului, toate acestea fiind considerate noţiuni primare (nedefinite).

Dacă o propoziţie p este adevărată vom scrie $v(p) = 1$, iar dacă este falsă, $v(p) = 0$; numerelor 0 şi 1 le vom spune valori de adevăr, prima desemnând falsul, iar cea de a doua adevărul.

Cele mai simple propoziţii sunt de forma "A este B". De exemplu,"Eminescu este autorul poeziei Luceafărul", "Balena este mamifer". Pornind de la asemenea propoziţii simple, prin conectări diverse, se obţin propoziţii compuse. Logica îşi propune să studieze cum se transmit valorile de adevăr la propoziţiile compuse, construite cu ajutorul operatorilor logici.

Principalii operatori logici sunt:

1) **negaţia**, notată cu non sau cu $\rceil$ sau cu $\bar{\cdot}$ (în limbaj uzual NU).

2) **disjuncţia**, notată cu $\vee$ (în limbaj uzual SAU).

3) **conjuncţia**, notată cu $\wedge$ (în limbaj uzual ŞI).

4) **implicaţia**, notată cu $\rightarrow$ (în limbaj uzual DACĂ..., ATUNCI...).

5) **echivalenţa**, notată cu $\leftrightarrow$ (în limbaj uzual DACĂ ŞI NUMAI DACĂ).

Observaţie. *Dacă p şi q desemnează două propoziţii, atunci avem:*

$v(p)$	$v(q)$	$v(\overline{p})$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

şi

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \to q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Observaţie

1) $(p \wedge q)$ *este* $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$,

2) $(p \to q)$ *este* $(\overline{p} \vee q)$,

3) $(p \longleftrightarrow q)$ *este* $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

Observaţie. *Din tabloul de mai sus rezultă următoarele:*

1) $v(p \longleftrightarrow q) = 1$ *numai dacă* $v(p) = v(q)$.

2) *dacă* $v(p) = 0$, *atunci* $v(p \to q) = 1$, *oricare ar fi propoziţia* q *(se spune că falsul implică orice).*

3) *dacă* $v(q) = 1$, *atunci* $v(p \to q) = 1$, *oricare ar fi propoziţia* p.

4) *pentru a afla valoarea de adevăr a implicaţiei* $p \to q$ *este suficient să examinăm doar cazul* $v(p) = 1$.

Definiţie. *O propoziţie compusă şi adevărată indiferent de ce valori de adevăr au propoziţiile care o compun se numeşte tautologie.*

Observaţie. *Dacă propoziţia* $(p \to q)$ *este adevărată vom nota* $p \Rightarrow q$ *şi vom spune că* p *este o condiţie suficientă pentru* q *sau că* q *este o condiţie necesară pentru* p.

Observaţie. *Dacă propoziţia* $(p \longleftrightarrow q)$ *este adevărată vom nota* $p \Leftrightarrow q$ *şi vom spune că* p *este o condiţie necesară şi suficientă pentru* q *(şi invers).*

Exerciţii.

1) Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii compuse:

i) Dacă temperatura este sub zero grade, atunci apa îngheaţă.

ii) Dacă apa fierbe la $100^\circ\ C$, atunci două corpuri încărcate cu electricitate de semne contrare se atrag.

Observaţie. *Exerciţiul anterior ne avertizează că trebuie să facem distincţie între implicaţia logică şi succesiunea cauză-efect din lumea fizică.*

2) Arătaţi că următoarele propoziţii sunt tautologii:

i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitate).

ii) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitate).

iii) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$ (absorţie).

iv) $p \vee p \Leftrightarrow p$, $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotenţă).

v) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate).

vi) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (legile lui De Morgan).

vii) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (principiul dublei negaţii).

3) Arătaţi că următoarele propoziţii sunt tautologii:

i) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$ (implicaţia este tranzitivă).

ii) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$.

iii) $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$ (regula modus-ponens).

iv) $(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$.

4) Arătaţi că $(p \to q) \Leftrightarrow (q \to p)$ nu este tautologie.

6) Să se afle negaţia propoziţiilor:

i) $(p \to q) \to r$

ii) $p \to (q \to r)$.

CALCULUL CU PREDICATE

Constante şi variabile
Predicate (unare, binare, etc)
Cuantificatorul universal şi cuantificatorul existenţial

Printre semnele (simbolurile) întâlnite în propoziţiile matematicii se află constante şi variabile. Astfel se întâlnesc constante precum un număr, semnul de adunare, etc, toate având o semnificaţie precisă, care rămâne neschimbată în decursul desfăşurării raţionamentelor. Deosebirea capitală dintre constante şi variabile constă în aceea că în timp ce primele au o semnificaţie prin ele însele, ultimele nu au această semnificaţie. Spre exemplu propoziţia "$1 + 2i$ este un număr real" are un conţinut clar (este falsă) dar propoziţia "x este un număr real" nu are o semnificaţie precisă, ea capătă o astfel de semnificaţie numai după înlocuirea variabilei x.

Definiţie. *Expresiile de forma $p(x, y, z, ..)$, care atunci cînd înlocuim variabilele $x, y, z, ..$ cu constante, se transformă în propoziţii bine determinate, se numesc predicate unare, binare, etc, după cum avem $1, 2$, etc, variabile.*

Observaţie. *Operatorii logici studiaţi permit introducerea unor noi predicate.*

De exemplu, pentru predicate $p(x)$ şi $q(x)$ putem considera noile predicate $\overline{p}(x), p(x) \vee q(x), p(x) \wedge q(x)$, etc.

În afara operatorilor logici de mai sus, în matematică, mai intervin şi alţi operatori, anume cuantificatorul universal, notat $\forall$, şi cuantificatorul existenţial, notat $\exists$.

Prin cuantificatorul $\forall$ se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziţia

$$(\forall x)\ p(x)$$

care este falsă numai dacă există o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie falsă.

Prin cuantificatorul $\exists$ se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziţia

$$(\exists x)\ p(x)$$

care este adevărată numai dacă există (cel puţin) o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată.

Prin urmare avem tautologiile:

$$\overline{(\forall x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\ \overline{p}(x)$$

şi

$$\overline{(\exists x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p}(x).$$

Ele arată că prin negare $\forall$ se schimbă în $\exists$, iar $\exists$ se schimbă în $\forall$.

Observaţie. *Avem următoarea proprietate de comutativitate a cuantificatorilor de acelaşi tip:*

$$(\forall x)(\forall y)\ p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\ p(x,y)$$

şi

$$(\exists x)(\exists y)\ p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ p(x,y)$$

sunt tautologii.

Observaţie. *Fie $p(x)$ şi $q(x)$ două predicate unare. Dacă propoziţia*

$$(\forall x)\ (p(x) \to q(x))$$

este adevărată, vom nota

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

A arăta că propoziţia de mai sus este falsă înseamnă a găsi o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată, iar $q(a)$ să fie falsă.

Unui astfel de exemplu i se spune contraexemplu la propoziţia dată.

Analog vom spune că $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ şi vom scrie

$$p(x) \Leftrightarrow q(x),$$

dacă propoziţia

$$(\forall x)(p(x) \longleftrightarrow q(x))$$

este adevărată.

Exerciţii.

1) Să se arate că oricare ar fi predicatul binar $p(x,y)$ avem:

$$(\exists x)(\forall y)\ p(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ p(x,y).$$

Este adevărată implicaţia reciprocă?

Observaţie extrem de importantă. *Exerciţiul de mai sus arată că ordinea cuantificatorilor logici este extrem de importantă. Acest lucru se poate constata comparând noţiunile de continutate şi continuitate uniformă (vezi paginile ...), de convergenţă simplă şi convergenţă uniformă pentru şiruri de funcţii (vezi paginile ...) etc.*

REZUMAT

CALCULUL CU PROPOZIŢII

Propoziţia, adevărul şi falsul sunt noţiuni primare.
Oricărei propoziţii i se asociază o valoare de adevăr.
0 **desemnează falsul**
1 **desemnează adevărul**
Principalii operatori logici sunt negaţia, disjuncţia, conjuncţia, implicaţia şi echivalenţa.
O propoziţie compusă care este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor care o compun se numeşte tautologie.
Dacă $(p \rightarrow q)$ **este adevărată vom spune că** p **este o condiţie suficientă pentru** q **sau că** q **este o condiţie necesară pentru** p**.**
Dacă propoziţia $(p \longleftrightarrow q)$ **este adevărată vom spune că** p **este o condiţie necesară şi suficientă pentru** q **(şi invers).**
Următoarele propoziţii sunt tautologii:
i) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$.
ii) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ **(principiul dublei negaţii).**

iii) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ **(regula modus-ponens).**
iv) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$**.**
Propoziţia $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$ **nu este tautologie.**

CALCULUL CU PREDICATE

Constantele sunt simbolurile dintr-o propoziţie matematică care au o semnificaţie precisă care rămâne neschimbată în decursul desfăşurării raţionamentelor.

Variabilele nu au semnificaţie prin ele însele.

Expresiile de forma $p(x, y, z, ..)$**, care atunci cînd înlocuim variabilele** $x, y, z, ..$ **cu constante, se transformă în propoziţii bine determinate, se numesc predicate unare, binare, etc, după cum avem** $1, 2,$ **etc, variabile.**

Prin cuantificatorul universal $\forall$ **şi prin cuantificatorul existenţial** $\exists$ **se trece de la predicatul** $p(x)$ **la propoziţiile** $(\forall x)p(x)$**, respectiv** $(\exists x)p(x)$**.**

Propoziţiile $\overline{(\forall x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\ \overline{p}(x)$ **şi** $\overline{(\exists x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\ \overline{p}(x)$ **sunt tautologii.**

Propoziţiile $(\forall x)(\forall y)\ p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\ p(x, y)$ **şi** $(\exists x)(\exists y)\ p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ p(x, y)$ **sunt tautologii.**

Oricare ar fi predicatul binar $p(x, y)$ **avem** $(\exists x)(\forall y)\ p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ p(x, y)$**. Implicaţia reciprocă este falsă.**

Bibliografie

1. *Gheorghe Enescu*, **Introducere în logica matematică**, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 10566

2. *Grigore Moisil*, **Elemente de logică şi teoria mulţimilor**, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 13259

3. *Gheorghe Enescu*, **Logica simbolică**, Editura Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 18512

ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR

Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecăţile larg răspândite, cu sentinţele filozofilor, dar şi cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu - teoria mulţimilor.

F. Hausdorff

Mulţimea ca noţiune primară
Noţiunea de submulţimne a unei mulţimi
Egalitatea a două mulţimi
Intersecţia şi reuniunea a două mulţimi
Mulţimea vidă
Mulţimi disjuncte
Diferenţa a două mulţimi
Complementara unei mulţimi în raport cu o altă mulţime
Produsul cartezian a două mulţimi

Funcţiile manifestă din când în când o comportare particulară în anumite puncte din domeniul lor de definiţie, care în cazurile cele mai importante este un interval, ele posedă acolo "singularităţi". H. hankel se ocupase deja cu astfel de chestiuni şi expusese principiul său de "condensare a singularităţilor". Astfel de puncte singulare scot în relief, în intervalul care formează argumentul funcţiei, anumite "varietăţi" sau totalităţi care deşi constituie numai o parte a punctelor intervalului, cu toate acestea pot conţine infinite de multe puncte. Se ridică problema structurii unor astfel de varietăţi sau mulţimi (de puncte) infinite.

Pe această cale a ajuns Georg Cantor la a sa teorie a mulţimilor. La extinderea teoremei de unicitate a reprezentărilor seriilor trigonometrice în cazul că pentru un număr infinit de valori seria nu este convergentă, el s-a văzut nevoit încă din 1872 să anticipeze anumite discuţii, chair dacă numai "aluzive", care "pot servi să pună în lumină relaţii ce apar totdeauna atunci când se dau mărimi numerice în număr finit sau infinit". (Este vorba de concepte ca "punct de acumulare", "punct limită", "derivare" la mulţimi de puncte ş. a.).

Totuşi, înainte de a ajunge la teoria mulţimilor a lui Cantor, avem de citat unii precursori ai săi. Cele mai vechi consideraţii care se referă la un "paradox al infinitului" provin chiar din perioada finală a antichităţii; ele se găsesc în comentariul lui Proclos asupra lui Euclid, însă nu descoperite, ci numai relatate de el, din nefericire fără să numească un nume. (Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, paginile 247-248).

Conceptul de mulţime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultimă instanţă, la acest concept. Vom considera că această noţiune este deja asimilată din anii de liceu. Nu vom încerca să definim noţiunea de mulţime sau să prezentăm axiomele teoriei mulţimilor. Studentul interesat poate vedea modul în care materialul pe care-l vom prezenta poate fi axiomatizat, consultând următoarele lucrări: *Paul Halmos*, **Naive Set Theory**, Springer- Verlag, 1974; *Paul Bernays (Abraham Fraenkel)*, **Axiomatic set theory**, North- Holland Publishing Company, 1958. Prin urmare vom prezenta aici numai câteva elemente de teoria naivă a mulţimilor, teorie ale cărei baze au fost puse de către matematicianul german Georg Cantor. În timp au fost puse în evidenţă o serie de slăbiciuni ale teoriei mulţimilor, aşa cum a fost ea dezvoltată de către Cantor. Pentru a remedia această situaţie, o nouă teorie a mulţimilor a fost elaborată de către Ernst Zermelo şi Adolf Fraenkel şi dezvoltată de către Kurt Gödel şi Paul Cohen (pentru detalii, se poate consulta lucrarea **Kurt Gödel (1906-1975)**, de *Ralf Schindler*, Gazeta Matematică, seria A, nr.1, 2008, paginile 72-76).

Notă istorică. *Georg Cantor* (1845-1918) s-a născut la Sank Petersburg. A studiat la Universitatea din Berlin, cu Weierstrass, Kummer şi Kronecker, unde devine prietenul lui Schwarz. Aici preocupările lui privesc teoria numerelor. În 1869 primeşte un post la Universitatea din Halle. Sub influenţa lui Heine, cercetările lui Cantor se vor îndrepta către analiza matematică. În 1870 el va demonstra unicitatea reprezentării unei funcţii cu ajutorul unei serii trigonometrice (problemă care, în prealabil, a fost studiată, fără succes, de mulţi matematicieni celebri, printre care Heine, Dirichlet, Lipschitz şi Riemann). În 1872 este promovat ca profesor extraordinar la Universitatea din Halle. În acelaşi an, în decursul unei excursii în Elveţia, îl va întîlni pe Dedekind, cu care va avea o prietenie solidă. Tot în 1872, Cantor publică un articol privind seriile trigonometrice, în care defineşte numerele reale în termeni de şiruri convergente de numere raţionale.În 1873 Cantor a arătat că

mulţimea numerelor raţionale (precum şi mulţimea numerelor algebrice) este numărabilă. În 1874 publică un articol în care arată că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă. Mai mult, într-o scrisoare din anul 1877 către Dedekind, arată că între punctele intervalului $[0, 1]$ şi punctele din $\mathbb{R}$ există o corespondenţă bijectivă. Cantor a fost surprins de această descoperire, fapt care l-a făcut să exclame: "Deşi am demonstrat acest lucru, nu-l pot crede". În 1878 publică un articol în care apare în mod riguros noţiunea de corespondenţă bijectivă. Între 1879 şi 1884 publică o serie de şase articole în Mathematische Annalen, în care se prezintă o introducere în teoria mulţimilor. Ideile sale prezentate aici au fost întâmpinate cu ostilitate de către mulţi matematicieni. În 1879, la sugestia lui Heine, este promovat la gradul de profesor. În 1896 el îi scrie lui Hilbert, prezentându-i paradoxurile pe care le-a descoperit în cadrul teoriei mulţimilor. Moare în 1918 într-un azil de boli mentale.

Cantor rămâne în istoria matematicii ca fondatorul teoriei moderne a mulţimilor şi ca cel care a introdus conceptul de număr infinit (prin introducerea numerelor cardinale). Pînă la el infinitul era, în matematică, un subiect tabu. Conform lui Gauss infinitul putea fi utilizat numai ca "un fel de a spune" care nu are valoare matematică. Ideile lui Cantor au determinat reevaluarea fundamentelor tuturor ramurilor matematicii şi au dat matematicii forma modernă de astăzi.

OPERAŢII CU MULŢIMI

$x \in A$ înseamnă că x este un element al lui A; se mai spune că x aparţine lui A sau că mulţimea A conţine elementul x.

$x \notin A$ înseamnă că x nu aparţine lui A.

Definiţie. *Fie A şi B două mulţimi. Spunem că A este o submulţime a lui B dacă orice element al lui A este şi element al lui B.*

În acest caz scriem $A \subseteq B$.

Dacă $A \subseteq B$, dar există un element al lui B care nu este element al lui A, spunem că A este o submulţime proprie a lui B şi scriem $A \subset B$.

Definiţie. *Două mulţimi A şi B se numesc egale dacă conţin aceleaşi elemente.*

În acest caz scriem $A = B$.

Observaţie. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A$.

Definiţie. *Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci intersecţia lor, notată $A \cap B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin ambelor mulţimi.*

Definiţie. *Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci reuniunea lor, notată $A \cup B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin uneia dintre cele două mulţimi.*

Observaţie

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

Observaţie. *Am presupus, în mod tacit, că intersecţia şi reuniunea a două mulţimi este tot o mulţime. Aceasta implică, printre altele, existenţa unei mulţimi care nu are nici un element (deoarece, dacă A şi B nu au elemente comune, atunci intersecţia lor nu are nici un element).*

Definiţie. *Mulţimea care nu are nici un element se numeşte mulţimea vidă şi se va nota cu $\emptyset$.*

Definiţie. *Două mulţimi A şi B care nu au elemente comune (i.e. $A \cap B = \emptyset$) se numesc disjuncte.*

Propoziţie. *Fie mulţimile A, B şi C.*
Atunci avem:
i) proprietatea de idempotenţă:

$$A \cap A = A \cup A = A.$$

ii) proprietatea de comutativitate:

$$A \cap B = B \cap A$$

şi

$$A \cup B = B \cup A.$$

iii) proprietatea de asociativitate:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

şi

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

iv) proprietatea de distributivitate:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

şi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Observaţie. *Analog se definesc*

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

şi

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

Mai general, fiind dată o familie de mulţimi A_j, *cu* $j \in J$, *putem considera*

$$\underset{j \in J}{\cup} A_j$$

mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin unei mulţimi A_j *şi*

$$\underset{j \in J}{\cap} A_j$$

mulţimea tuturor elementelor care aparţin tuturor mulţimilor A_j.

Definiţie. *Dacă* A *şi* B *sunt două mulţimi, atunci complementara lui* B *în raport cu* A *este mulţimea tuturor elementelor lui* A *care nu aparţin lui* B *şi se va nota cu* $A - B$.

Observaţie

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

Observaţie. *Uneori mulţimea* A *este subînţeleasă, nefiind necesar să fie menţionată explicit. În acest caz* $A - B$ *se va numi complementara lui* B.

Propoziţie. *Pentru două mulţimi A şi B avem:*

$$(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$$

şi

$$A = (A \cap B) \cup (A - B).$$

Propoziţie (Legile lui De Morgan). *Pentru trei mulţimi A, B şi C avem:*

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

şi

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

Notă istorică. *Augustus De Morgan* s-a născut în 1806, în India (colonie britanică în acel timp). A studiat la Trinity College Cambridge. În 1827 primeşte un post la University College London. În 1833 a definit şi a introdus riguros metoda inducţiei matematice. A fost primul preşedinte al London Mathematical Society (înfiinţată în 1866). A murit în 1871.

Definiţie. *Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci produsul cartezian, notat $A \times B$, al lui A cu B, este mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b), cu $a \in A$ şi $b \in B$, unde $(a, b) \overset{def}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Notă istorică. *René Descartes* (1596-1650) creator al geometriei analitice, ofiţer al armatei franceze, matematician, a fost unul dintre cei mai de seamă filozofi ai tuturor timpurilor. S-a născut în Franţa. A urmat colegiul din Anjou între 1604 şi 1612, studiind aici limbile clasice, logica, filozofia şi matematica (dupa cărţile lui Clavius). A studiat la Universitatea din Poitiers, de unde primeşte, în 1616, o diplomă în drept. Apoi se înscrie la scoala militară din Breda. În 1618 începe studiul matematicii şi mecanicii sub îndrumarea olandezului Isaac Beeckman. În 1619 se înrolează în armata bavareză. În 1628 se stabileşte, după multe călătorii prin Europa, în Olanda. În 1637 publică tratatul "*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*". El susţine aici că numai matematicile reprezintă ceva sigur, deci totul trebuie să aibă la bază matematicile. În 1649 regina Suediei îl convinge pe Descartes să viziteze ţara sa. Aici îşi va găsi Descartes sfîrşitul, răpus de pneumonie.

Observaţie.
$$(a,b) = (a^{'},b^{'}) \Leftrightarrow a = a^{'} \text{ şi } b = b^{'}.$$

REZUMAT

Conceptul de mulţime este unul primar.

Fie A şi B două mulţimi.

Spunem că A este o submulţime a lui B dacă orice element al lui A este şi element al lui B.

În acest caz scriem $A \subseteq B$.

A şi B se numesc egale dacă conţin aceleaşi elemente.

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.

Intersecţia mulţimilor A şi B, notată $A \cap B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin ambelor mulţimi, iar reuniunea lor, notată $A \cup B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin uneia dintre cele două mulţimi.

Mulţimea care nu are nici un element se numeşte mulţimea vidă şi se va nota cu $\emptyset$.

Două mulţimi A şi B care nu au elemente comune (i.e. $A \cap B = \emptyset$) se numesc disjuncte.

Complementara lui B în raport cu A este mulţimea tuturor elementelor lui A care nu aparţin lui B şi se va nota cu $A - B$.

Legile lui De Morgan:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

şi

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

$(a,b) \stackrel{def}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$ se numeşte pereche ordonată.

Produsul cartezian al lui A cu B, notat $A \times B$, este mulţimea tuturor perechilor ordonate (a,b), cu $a \in A$ şi $b \in B$.

Bibliografie

1. *Grigore Moisil*, **Elemente de logică şi teoria mulţimilor**, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 13259

2. *Constantin Năstăsescu*, **Introducere în teoria mulţimilor**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 22130

3. *A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy*, **Foundations of Set Theory**, Elsevier Science Publishers B.V., 1984, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 36779

FUNCŢIE, GRUP, INEL, CORP, SPAŢIU VECTORIAL, RELAŢII

Noţiunea de funcţie
Compunerea a două funcţii
Funcţii injective, surjective, bijective
Inversa unei funcţii
Imaginea şi preimaginea unei mulţimi printr-o funcţie
Noţiunile de grup, inel şi corp
Noţiunea de spaţiu vectorial
Relaţie de echivalenţă
Mulţimea cât (sau factor) generată de o relaţie de echivalenţă
Surjecţia canonică generată de o relaţie de echivalenţă
Relaţie de ordine
Mulţime ordonată, Mulţime total ordonată
Majorant, Minorant
Mulţime majorată, minorată, mărginită
Marginea superioară şi inferioară a unei mulţimi
Maximul şi minimul unei mulţimi
Mulţime complet ordonată
Mulţime bine ordonată

Pe lângă conceptul de limită şi conceptul de continuitate, care se defineşte cu ajutorul celui de limită, concepte pe care îndeosebi A. L. Cauchy le pune la baza analizei expusă sistematic, conceptul de funcţie, ale cărui începuturi datează poate de la Leibniz, se dovedeşte a fi un concept fundamental, dar şi problematic. În secolul al XVIII-lea se impusese conceptul de "funcţie complet arbitrară" cu prilejul problemei coardei vibrante. La Leonhard Euler funcţiile sunt date în două moduri: mai întâi, printr-o "expresie analitică" şi în al doilea rând, printr-o curbă trasată "cu mâna liberă". Surprinzătoarea capacitate a seriilor trigonometrice, întrebuinţate poate pentru prima oară de către Daniel Bernoulli şi cercetate amănunţit de către J. B. J. Fourier, de a reprezenta şi funcţii aparent cu totul neregulate, a condus în sfârşit la lucrările lui P. G. Lejeune Dirichlet asupra limitei posibilităţilor de reprezentare şi, în legătură cu aceasta, la un concept extrem de

general, care tocmai din această cauză nu este lipsit de dificultăţi. (Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, paginile 247-248).

Noţiunea de funcţie

Pentru matematicienii de acum un secol şi jumătate, cuvântul funcţie însemna, în mod obişnuit, o formulă, ca de exemplu

$$f(x) = x^2 + 3x - 5,$$

care asocia oricărui număr real un alt număr real.

Faptul că anumite formule, ca de exemplu

$$f(x) = \sqrt{x - 5},$$

nu asociau numere reale oricărui număr real, era binecunoscut, dar nu era considerat ca un motiv destul de solid pentru a extinde noţiunea de funcţie.

Întrebarea dacă asocierea

$$h(x) = |x|$$

este o ”funcţie”, a născut controverse la acel timp, deoarece, în definitiv, definiţia lui $|x|$ este dată "pe bucăţi", anume

$$|x| = \{ \begin{array}{rl} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{array} .$$

Pe măsură ce matematica s-a dezvoltat, a devenit din ce în ce mai clar că cerinţa ca o funcţie să fie dată printr-o formulă este foarte restrictivă şi că o definiţie mai generală este necesară.

Iată o definiţie ”provizorie” a funcţiei: O funcţie f de la o mulţime A la o mulţime B este o lege de corespondenţă care asociază ORICĂRUI element x din A un UNIC element $f(x)$ din B.

Să observăm că această definiţie are un punct slab, anume ambiguitatea expresiei ”lege de corespondenţă”.

Am dori să eliminăm acest inconvenient prin definirea funcţiei numai în termeni de teoria mulţimilor. Această abordare are dezavantajul de a fi oarecum artificială, dar câştigul în ceea ce priveşte rigoarea este mult mai important comparativ cu orice altfel de dezavantaje.

Definiţie. *Fie* A *şi* B *două mulţimi. O funcţie de la* A *la* B *este tripletul format cu aceste două mulţimi şi o submulţime* f *a lui* $A \times B$ *cu proprietăţile următoare:*

i) pentru orice $a \in A$ *există* $b \in B$ *astfel ca* $(a, b) \in f$.

ii) dacă pentru $a \in A$ *şi* $b, b^{'} \in B$ *avem* $(a, b) \in f$ *şi* $(a, b^{'}) \in f$, *atunci* $b = b^{'}$.

Observaţie. A *se numeşte domeniul lui* f, *iar* B *se numeşte codomeniul lui* f.

Observaţie. *Tripletul* (A, B, f) *se mai notează* $f : A \to B$.

Observaţie. *Faptul că* $(a, b) \in f$ *se mai notează* $f(a) = b$. *Se mai spune că* b *este valoarea lui* f *în* a *sau că* b *este imaginea lui* a *prin* f.

Compunerea a două funcţii

Definiţie. *Fie* f *o funcţie cu domeniul* A *şi codomeniul* B, *iar* g *o funcţie cu domeniul* $B^{'}$ *şi codomeniul* C, *unde* $B \subseteq B^{'}$. *Definim o nouă funcţie, notată* $g \circ f$ *care are domeniul* A *şi codomeniul* C, *dată de*

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \textit{există } b \in B \textit{ astfel ca}$$

$$(a, b) \in f \textit{ şi } (b, c) \in g\}.$$

Observaţie. *Avem deci*

$$g \circ f : A \to C$$

şi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

pentru orice $x \in A$.

Funcţii injective, surjective, bijective

Definiţie. *O funcţie* $f : A \to B$ *se numeşte bijectivă dacă:*

i) f *este injectivă, i.e. pentru orice* $a, a^{'} \in A$ *şi* $b \in B$ *astfel ca* $(a, b) \in f$ *şi* $(a^{'}, b) \in f$ *avem* $a = a^{'}$,

şi

ii) f este surjectivă, i.e. pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca $(a, b) \in f$.

Observaţie. *f este injectivă dacă şi numai dacă pentru orice $a, a^{'} \in A$, $f(a) = f(a^{'}) \Rightarrow a = a^{'}$ dacă şi numai dacă pentru orice $a, a^{'} \in A$, $a \neq a^{'} \Rightarrow f(a) \neq f(a^{'})$.*

Observaţie. *f este surjectivă dacă şi numai dacă pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca*

$$f(a) = b.$$

Observaţie. *f este bijectivă dacă şi numai dacă pentru orice $b \in B$ există un unic $a \in A$ astfel ca*

$$f(a) = b.$$

Exerciţii. **1)** Fie $f : A \to B$. Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, pentru orice $X, Y \subseteq A$, dacă şi numai dacă $f(A - X) \subseteq B - f(A)$, orice $X \subseteq A$.

2) Fie $f : A \to B$. Să se arate că f este surjectivă dacă şi numai dacă $f(A - X) \supseteq B - f(A)$, orice $X \subseteq A$.

3) Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Să se arate că:

i) dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;

ii) dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;

iii) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;

iv) dacă $g \circ f$ este sujectivă, atunci g este surjectivă.

4) Să se arate că pentru orice mulţime nevidă X nu există nici o funcţie surjectivă $f : X \to \mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Inversa unei funcţii

Definiţie. *Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă. Atunci inversa lui f, notată cu f^{-1}, este funcţia cu domeniul B, codomeniul A şi*

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}.$$

Observaţie. *Avem $f^{-1} : B \to A$ şi*

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Imaginea şi preimaginea unei mulţimi printr-o funcţie

Definiţie. *Fie* $f : A \to B$ *şi* $E \subseteq A$. *Atunci imaginea lui* E *prin funcţia* f *este submulţimea lui* B *dată de*

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Propoziţie. *Fie* $f : A \to B$ *şi* $E, F \subseteq A$. *Atunci avem:*
1)
$$E \subseteq F \Rightarrow f(E) \subseteq f(F);$$
2)
$$f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F);$$
3)
$$f(E \cup F) = f(E) \cup f(F);$$
4)
$$f(E - F) \subseteq f(E).$$

Observaţie. *În 2), incluziunea este, în general, strictă.*

Definiţie. *Fie* $f : A \to B$ *şi* $H \subseteq B$. *Atunci imaginea inversă (sau preimaginea) lui* H, *prin funcţia* f, *este submulţimea lui* A *dată de*

$$f^{-1}(H) = \{x \mid x \in A \text{ şi } f(x) \in H\}.$$

Observaţie. *Nu am cerut în definiţia de mai sus ca* f *să fie bijectivă. Totuşi, dacă* f *este bijecţie, atunci* $f^{-1}(H)$ *din definiţia de mai sus, este imaginea lui* H *prin inversa lui* f, *anume prin* f^{-1}.

Propoziţie. *Fie* $f : A \to B$ *şi* $G, H \subseteq B$. *Atunci avem:*
1)
$$G \subseteq H \Rightarrow f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H);$$
2)
$$f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H);$$
3)
$$f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H);$$

4)

$$f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H).$$

Noţiunile de grup, inel şi corp

Definiţie. *Un cuplu* $(G, *)$ *format cu o mulţime nevidă* G *şi cu o lege de compoziţie* $*$ *pe* G *(i.e.* $x * y \in G$*, pentru orice* $x, y \in G$*), se numeşte grup dacă sunt verificate următoarele axiome:*

i)

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

pentru orice $x, y, z \in G$*;*

ii) există $e \in G$ *astfel încât*

$$e * x = x * e = x,$$

pentru orice $x \in G$*;*

iii) pentru orice $x \in G$ *există* $x^{'} \in G$ *astfel încât*

$$x^{'} * x = x * x^{'} = e.$$

Dacă în plus este verificată şi axioma

iv)

$$x * y = y * x,$$

pentru orice $x, y \in G$*,*

atunci grupul se numeşte comutativ (sau abelian).

Observaţie. *Elementul* e *este unic determinat şi se numeşte elementul neutru al grupului* G*. Elementul* $x^{'}$ *este unic determinat şi poartă numele de simetricul (sau inversul sau opusul) elementului* x*.*

Definiţie. *O mulţime nevidă* A*, împreună cu două legi de compoziţie* $+$ *şi* $\cdot$ *(i.e.* $x + y \in A$ *şi* $x \cdot y \in A$*, pentru orice* $x, y \in A$*) se numeşte inel dacă sunt verificate următoarele axiome:*

i) $(A, +)$ *este grup abelian;*

ii) $(A, \cdot)$ *este monoid, i.e.*

iia)

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

pentru orice $x, y, z \in A$*;*

iib) există $1 \in A$ *astfel încât*

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

pentru orice $x \in A$.

iii)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

şi

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

pentru orice $x, y, z \in A$, *i.e. înmulţirea este distributivă faţă de adunare la stânga şi la dreapta.*

Observaţie.

1. *Elementul neutru al grupului* $(A, +)$, *notat cu* 0, *se numeşte elementul zero al inelului, iar* 1 *(care este unic determinat) poartă numele de elementul unitate al inelului.*

2. *Dacă este satisfăcută şi axioma:*

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pentru orice $x, y \in A$, *atunci spunem că inelul* A *este comutativ.*

3. *Spunem că* A *este un inel fără divizori ai lui zero dacă pentru orice* $x, y \in A$,

$$x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0 \text{ implică } x \cdot y \neq 0.$$

Un inel comutativ cu cel puţin două elemente şi care nu are divizori ai lui zero se numeşte domeniu de integritate.

Definiţie. *Un inel* K *se numeşte corp dacă* $0 \neq 1$ *şi dacă este satisfăcută următoarea axiomă:*

pentru orice $x \in K - \{0\}$ *există* $x^{-1} \in K$ *astfel încât* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, *i.e. orice element al lui* K *care este diferit de* 0 *este simetrizabil în raport cu înmulţirea.*

Un corp se numeşte comutativ dacă înmulţirea sa este comutativă.

Noţiunea de spaţiu vectorial

Definiţie. *Fie* K *un corp. Se numeşte spaţiu vectorial (peste corpul* K*) un grup abelian* $(V, +)$ *pe care este dată o lege de compoziţie externă cu*

domeniul $K \times V$ *şi codomeniul* V *(*$(\alpha, u) \to \alpha u$*) care satisface, pentru orice* $\alpha, \beta \in K$ *şi orice* $u, v \in V$ *următoarele condiţii:*

1)
$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u;$$

2)
$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$

3)
$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$$

4)
$$1u = u.$$

Terminologie. *Elementele lui* V *se numesc vectori, iar elementele lui* K *se numesc scalari.* $+$ *poartă numele de adunarea vectorilor, iar legea de compoziţie externă se numeşte înmulţirea vectorilor cu scalari. Elementul neutru al grupului* $(V, +)$ *se numeşte vectorul zero şi se va nota cu* 0*, ca şi scalarul zero. Dacă* $K = \mathbb{R}$*, atunci se spune că* V *este spaţiu vectorial real.*

Observaţie. *Uneori spaţiile vectoriale sunt numite şi spaţii liniare.*

Definiţie. *Fie* V *un spaţiu vectorial peste corpul* K*. Un sistem* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *de vectori se numeşte bază a lui* V *dacă:*

1) pentru orice $x \in V$*, există* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ *astfel încât*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n;$$

2) pentru $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

Relaţii

Definiţie. *Se numeşte relaţie pe o mulţime nevidă* X*, orice submulţime nevidă* ρ *a lui* $X \times X$*.*

Dacă $(x, y) \in \rho$*, vom scrie* $x\rho y$*.*

Definiţie. *O relaţie* ρ *pe o mulţime nevidă* X *se numeşte:*

- reflexivă dacă $x\rho x$*, pentru orice* $x \in X$*;*

- *simetrică dacă* $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, *pentru orice* $x, y \in X$;

- *antisimetrică dacă* $x\rho y$ *şi* $y\rho x \Rightarrow x = y$, *pentru orice* $x, y \in X$;

- *tranzitivă dacă* $x\rho y$ *şi* $y\rho z \Rightarrow x\rho z$, *pentru orice* $x, y, z \in X$.

Definiţie. *O relaţie* ρ *pe o mulţime nevidă* X *se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Observaţie. *De multe ori relaţia de echivalenţă* ρ *se notează prin* $\sim$. *Astfel* $x\rho y$ *se scrie sub forma* $x \sim y$.

Definiţie. *Fie* $\sim$ *o relaţie de echivalenţă pe* X *şi* $x \in X$. *Mulţimea* $\hat{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$ *se numeşte clasa de echivalenţă a lui* x.

Observaţie.. *Fie* $\sim$ *o relaţie de echivalenţă pe* X *şi* $x, y \in X$. *Atunci* $\hat{x} = \hat{y}$ *sau* $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Definiţie. *Fie* $\sim$ *o relaţie de echivalenţă pe* X. *Mulţimea* $\{\hat{x} \mid x \in X\}$, *notată* $X/\sim$, *se numeşte mulţimea cât (sau factor) a lui* X *generată de* $\sim$.

Definiţie. *Fie* $\sim$ *o relaţie de echivalenţă pe* X. *Funcţia* $p : X \to X/\sim$, *dată de* $p(x) = \hat{x}$, *pentru orice* $x \in X$, *se numeşte surjecţia canonică generată de* $\sim$.

Definiţie. *O relaţie* ρ *pe o mulţime nevidă* X *se numeşte relaţie de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

Observaţie. *De multe ori relaţia de ordine* ρ *se notează prin* $\leq$. *Astfel* $x\rho y$ *se scrie sub forma* $x \leq y$.

Definiţie. *Un cuplu* $(X, \leq)$ *unde* X *este o mulţime nevidă, iar* $\leq$ *este o relaţie de ordine pe* X *se numeşte mulţime ordonată.*

Definiţie. *Mulţimea ordonată* $(X, \leq)$ *se numeşte total ordonată dacă pentru orice* $x, y \in X$ *avem* $x \leq y$ *sau* $y \leq x$ *(i.e. orice două elemente sunt comparabile).*

Definiţie. *Fie* $(X, \leq)$ *o mulţime ordonată,* A *o submulţime nevidă a lui* X *şi* $m \in X$. *Atunci* m *se numeşte majorant (minorant) al lui* A *dacă pentru orice* $a \in A$, *avem* $a \leq m$ *(respectiv* $a \geq m$*).*

Observaţie. *Dacă m este majorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic şi se numeşte maximul lui A (şi se notează cu $\max(A)$) sau ultim element al lui A sau cel mai mare element al lui A. Dacă m este minorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic şi se numeşte minimul lui A (şi se notează cu $\min(A)$) sau prim element al lui A sau cel mai mic element al lui A.*

Definiţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă a lui X. Dacă există un majorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este majorată (mărginită superior). Dacă există un minorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este minorată (mărginită inferior). Dacă A este mărginită inferior şi superior, atunci A se numeşte mărginită.*

Definiţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi A o submulţime nevidă majorată a lui X. Se spune că A are margine superioară dacă există cel mai mic majorant (i.e. mulţimea majoranţilor lui A are minim, sau, altfel spus, mulţimea majoranţilor lui A are un cel mai mic element, adică, echivalent, mulţimea majoranţilor lui A are un prim element). În acest caz notăm cu $\sup A$ cel mai mic majorant al lui A. $\sup A$ se numeşte marginea superioară a lui A sau supremum de A.*

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi A o submulţime nevidă minorată a lui X.

Se spune că A are margine inferioară dacă există cel mai mare minorant (i.e. mulţimea minoranţilor lui A are maxim, sau, altfel spus mulţimea minoranţilor lui A are un cel mai mare element, sau, echivalent, mulţimea minoranţilor lui A are un ultim element). În acest caz notăm cu $\inf A$ cel mai mare minorant al lui A. $\inf A$ se numeşte marginea inferioară a lui A, sau infimum de A.

Observaţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă majorată a lui X. Dacă există $\max A$, atunci există şi $\sup A$ şi $\sup A = \max A$.*

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă minorată a lui X. Dacă există $\min A$, atunci există şi $\inf A$ şi $\inf A = \min A$.

Definiţie. *O relaţie de ordine $\leq$ pe mulţimea nevidă X se numeşte completă dacă pentru orice submulţime nevidă majorată A a lui X există $\sup A$. Se spune în acest caz că mulţimea ordonată $(X, \leq)$ este complet ordonată.*

Definiţie. *O mulţime ordonată se numeşte bine ordonată dacă orice submulţime nevidă a sa are prim element (sau spus altfel, minim, sau, încă, cel mai mic element).*

Observaţie. *Toate noţiunile de mai sus îşi vor găsi exemplificarea în capitolul consacrat mulţimilor $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$.*

Exerciţii. **1**. Fie A o mulţime şi $(A_i)_{i\in I}$ o partiţie a lui A (i.e. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A$ şi $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$). Să se arate că $x \sim y$ dacă şi numai dacă există $i \in I$ astfel încât $x, y \in A_i$ defineşte o relaţie de echivalenţă pe A, pentru care clasele de echivalenţă coincid cu elementele partiţiei considerate.

2. Fie X o mulţime nevidă. Pe $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ se consideră relaţia dată de $A\rho B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$. Să se arate că ρ este o relaţie de ordine care nu este totală dacă X are cel puţin două elemente.

REZUMAT

Fie A şi B două mulţimi. O funcţie de la A la B este tripletul format cu aceste două mulţimi şi o submulţime f a lui $A \times B$ cu proprietăţile următoare: i) pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel ca $(a, b) \in f$; ii) dacă pentru $a \in A$ şi $b, b^{'} \in B$ avem $(a, b) \in f$ şi $(a, b^{'}) \in f$, atunci $b = b^{'}$. Faptul că $(a, b) \in f$ se mai notează $f(a) = b$.

Fie f o funcţie cu domeniul A şi codomeniul B iar g o funcţie cu domeniul $B^{'}$ şi codomeniul C, unde $B \subseteq B^{'}$. Definim o nouă funcţie, notată $g \circ f$ care are domeniul A şi codomeniul C, dată de $g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid$există $b \in B$ astfel ca $(a, b) \in f$ şi $(b, c) \in g\}$.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte bijectivă dacă:

i) f este injectivă, i.e. pentru orice $a, a^{'} \in A$ şi $b \in B$ astfel ca $(a, b) \in f$ şi $(a^{'}, b) \in f$ avem $a = a^{'}$, şi ii) f este surjectivă, i.e. pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca $(a, b) \in f$.

Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă. Atunci inversa lui f, notată cu f^{-1}, este funcţia cu domeniul B, codomeniul A şi $f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}$.

Fie $f : A \to B$ şi $E \subseteq A$. Atunci imaginea lui E prin funcţia f este submulţimea lui B dată de $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Fie $f : A \to B$ şi $H \subseteq B$. Atunci imaginea inversă (sau preimaginea) lui H, prin funcţia f, este submulţimea lui A dată de $f^{-1}(H) = \{x \mid x \in A$ şi $f(x) \in H\}$.

Un cuplu $(G, *)$ format cu o mulţime nevidă G şi cu o lege de compoziţie $*$ pe G (i.e. $x * y \in G$, pentru orice $x, y \in G$), se numeşte grup dacă sunt verificate următoarele axiome: i) $x*(y*z) = (x*y)*z$, pentru orice $x, y, z \in G$; ii) există $e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x$, pentru orice $x \in G$; iii) pentru orice $x \in G$ există $x^{'} \in G$ astfel încât $x^{'} * x = x * x^{'} = e$.

Dacă în plus este verificată şi axioma: $x * y = y * x$, pentru orice $x, y \in G$, atunci grupul se numeşte comutativ (sau abelian).

O mulţime nevidă A, împreună cu două legi de compoziţie $+$ şi $\cdot$ (i.e. $x + y \in A$ şi $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$) se numeşte inel dacă sunt verificate următoarele axiome: i) $(A, +)$ este grup abelian; iia) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, pentru orice $x, y, z \in A$; iib) există $1 \in A$ astfel încât $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, pentru orice $x \in A$; iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ şi $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Elementul neutru al grupului $(A, +)$, notat cu 0, se numeşte elementul zero al inelului, iar 1 poartă numele de elementul unitate al inelului.

Dacă este satisfăcută şi axioma: $x \cdot y = y \cdot x$, pentru orice $x, y \in A$, atunci spunem că inelul A este comutativ.

Spunem că A este un inel fără divizori ai lui zero dacă pentru orice $x, y \in A$, $x \neq 0$ şi $y \neq 0$ implică $x \cdot y \neq 0$.

Un inel comutativ cu cel puţin două elemente şi care nu are divizori ai lui zero se numeşte domeniu de integritate.

Un inel K se numeşte corp dacă $0 \neq 1$ şi dacă este satisfăcută următoarea axiomă: pentru orice $x \in K - \{0\}$ există $x^{-1} \in K$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Un corp se numeşte comutativ dacă înmulţirea sa este comutativă.

Fie K un corp. Se numeşte spaţiu vectorial (peste corpul K) un grup abelian $(V, +)$ pe care este dată o lege de compoziţie externă cu domeniul $K \times V$ şi codomeniul V ($(\alpha, u) \to \alpha u$) care satisface, pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi orice $u, v \in V$ următoarele condiţii: 1) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$; 2) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$; 3) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$; 4) $1u = u$.

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K. Un sistem $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de vectori se numeşte bază a lui V dacă: 1) pentru orice $x \in V$, există $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ astfel încât $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$; 2) pentru $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Se numeşte relaţie pe o mulţime nevidă X, orice submulţime nevidă ρ a lui $X \times X$. Dacă $(x, y) \in \rho$, vom scrie $x\rho y$.

O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte:

- reflexivă dacă $x\rho x$, pentru orice $x \in X$;

- simetrică dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, pentru orice $x, y \in X$;

- antisimetrică dacă $x\rho y$ şi $y\rho x \Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in X$;

- tranzitivă dacă $x\rho y$ şi $y\rho z \Rightarrow x\rho z$, pentru orice $x, y, z \in X$.

O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. De multe ori relaţia de echivalenţă ρ se notează prin $\sim$. Astfel $x\rho y$ se scrie sub forma $x \sim y$. Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X şi $x \in X$. Mulţimea $\hat{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x. Mulţimea $\{\hat{x} \mid x \in X\}$, notată $X/\sim$, se numeşte mulţimea cât (sau factor) a lui X generată de $\sim$. Funcţia $p : X \to X/\sim$, dată de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in X$, se numeşte surjecţia canonică generată de $\sim$.

O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte relaţie de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. De multe ori relaţia de ordine ρ se notează prin $\leq$. Astfel $x\rho y$ se scrie sub forma $x \leq y$. Un cuplu $(X, \leq)$, unde X este o mulţime nevidă, iar $\leq$ este o relaţie de ordine pe X se numeşte mulţime ordonată.

Mulţimea ordonată $(X, \leq)$ se numeşte total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (i.e. orice două elemente sunt comparabile).

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă a lui X şi $m \in X$. Atunci m se numeşte majorant (minorant) al lui A dacă pentru orice $a \in A$, avem $a \leq m$ (respectiv $a \geq m$).

Dacă m este majorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic şi se numeşte maximul lui A (şi se notează cu $\max(A)$) sau ultim element al lui A sau cel mai mare element al lui A. Dacă m este minorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic şi se numeşte minimul lui A (şi se notează cu $\min(A)$) sau prim element al lui A sau cel mai mic element al lui A.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă a lui X. Dacă există un majorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este majorată (mărginită superior). Dacă există un minorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este minorată (mărginită inferior).

Dacă A este mărginită inferior şi superior, atunci A se numeşte mărginită.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi A o submulţime nevidă majorată a lui X. Se spune că A are margine superioară dacă există cel mai mic majorant (i.e. mulţimea majoranţilor lui A are minim, sau, altfel spus, mulţimea majoranţilor lui A are un cel mai mic element, adică, echivalent, mulţimea majoranţilor lui A are un prim element). În acest caz notăm cu $\sup A$ cel mai mic majorant al lui A. $\sup A$ se numeşte marginea superioară a lui A sau supremum de A.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi A o submulţime nevidă minorată a lui X.

Se spune că A are margine inferioară dacă există cel mai mare minorant (i.e. mulţimea minoranţilor lui A are maxim, sau, altfel spus mulţimea minoranţilor lui A are un cel mai mare element, sau, echivalent, mulţimea minoranţilor lui A are un ultim element). În acest caz notăm cu $\inf A$ cel mai mare minorant al lui A. $\inf A$ se numeşte marginea inferioară a lui A, sau infimum de A.

O relaţie de ordine $\leq$ pe mulţimea nevidă X se numeşte completă dacă pentru orice submulţime nevidă majorată A a lui X există $\sup A$. Se spune în acest caz că mulţimea ordonată $(X, \leq)$ este complet ordonată.

O mulţime ordonată se numeşte bine ordonată dacă orice submulţime nevidă a sa are prim element (sau spus altfel, minim, sau, încă, cel mai mic element).

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *Ion D. Ion, A. Ghioca, N. Nediţă*, **Matematică, Algebră, Manual pentru clasa a XII-a**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 27854

3. *Marius Rădulescu, Sorin Rădulescu*, **Teoreme şi probleme de analiză matematică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, cota la

biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 27184

STRUCTURI FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI MATEMATICE

"... între numere există o astfel de perfecţiune şi armonie încât trebuie să meditām zile şi nopţi la admirabila lor închegare."

Simon Stévin

MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE $\mathbb{N}$

MULŢIMI FINITE ŞI INFINITE

Axiomele lui Peano
Adunarea, înmulţirea şi relaţia de ordine pe $\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ este bine ordonată
Mulţimi finite şi infinite
Mulţimi numărabile şi nenumărabile
Mulţimi cel mult numărabile

"Dumnezeu a creat numerele naturale, restul este opera omului"
Leonard Kronecker

Create de intelectul uman pentru a număra obiectele din diferite colecţii, numerele nu se referă la caracteristicile individuale ale obiectelor numărate. Astfel, numărul 6 este o abstracţie a tuturor colecţiilor reale formate din 6 obiecte; el nu depinde de nici o proprietate specifică a acestor obiecte sau de simbolurile folosite. Caracterul abstract al ideii de număr devine clar numai la un stadiu relativ avansat al dezvoltării intelectuale. Pentru copii, numerele rămânîn totdeauna legate de obiecte palpabile, ca de pildă degete sau pietricele; în limbile diferitelor triburi, numerele au încă un sens numeric concret, folosindu-se cuvinte diferite pentru numărarea obiectelor de diferite tipuri.

Ce este matematica?, de R. Courant şi H. Robbins, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pagina 17

Pornind de la proprietăţile elementare ale numerelor naturale care ne sunt cunoscute din experienţa cotidiană, vom prezenta o axiomatizare a acestora care sintetizează o experienţă milenară.

Axiomele lui Peano

Se consideră ca noţiuni primare mulţimea $\mathbb{N}$ şi o lege care asociază oricărui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n^{'} \in \mathbb{N}$ numit succesorul lui n.

Iată axiomele lui Peano:

AP1. *Orice* $n \in \mathbb{N}$ *are un unic succesor (deci* $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *dată de* $s(n) = n^{'}$ *este funcţie).*

AP2. *Există un element din* $\mathbb{N}$, *desemnat prin* 1, *care are proprietatea că* $n^{'} \neq 1$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *(deci* $1 \notin s(\mathbb{N})$*).*

AP3. *Pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, *avem* $m^{'} \neq n^{'}$ *(deci* s *este injectivă).*

AP4. *Dacă* $S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$ *şi* $(n \in S \Rightarrow n^{'} \in S)$, *atunci* $S = \mathbb{N}$.

Din motive evidente, ultima axiomă poartă numele de axioma inducţiei matematice.

Consecinţe imediate

1. *Dacă* $m, n \in \mathbb{N}$ *şi* $m^{'} = n^{'}$, *atunci* $m = n$.

2. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq n^{'}$.

3. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, *există* $p \in \mathbb{N}$, *astfel încât* $p^{'} = n$ *(i.e. orice număr natural diferit de* 1 *are un predecesor).*

Observaţie. *Dacă* P *este o proprietate a unui element oarecare a lui* $\mathbb{N}$, *care este adevărată pentru* 1 *şi care presupusă adevărată pentru* $n \in \mathbb{N}$ *este adevărată şi pentru* $n^{'}$, *atunci* P *este adevărată pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Astfel putem vorbi despre demonstraţie şi definiţie prin inducţie matematică.*

Adunarea pe $\mathbb{N}$

Fiecărui cuplu (m, n) *de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin* $m + n$ *definit prin inducţie matematică după* n *astfel:*

$$m + 1 = m^{'}$$

şi

$$m + n^{'} = (m + n)^{'}.$$

Proprietăţi

1.

$$m + (n + p) = (m + n) + p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$*, i.e. adunarea pe* $\mathbb{N}$ *este asociativă.*

2.

$$m + n = n + m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$*, i.e. adunarea pe* $\mathbb{N}$ *este comutativă.*

3.

$$m + p = n + p \Rightarrow m = n,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

4.

$$n + p \neq n,$$

pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$.

Înmulţirea pe $\mathbb{N}$

Fiecărui cuplu (m, n) *de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin* $m \cdot n$ *definit prin inducţie matematică după* n *astfel:*

$$m \cdot 1 = m$$

şi

$$m \cdot n^{'} = mn + m.$$

Proprietăţi

1.

$$m \cdot n = n \cdot m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$*, i.e. înmulţirea pe* $\mathbb{N}$ *este comutativă.*

2.

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$*, i.e. înmulţirea pe* $\mathbb{N}$ *este distributivă faţă de adunarea pe* $\mathbb{N}$.

3.

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, i.e. înmulţirea pe $\mathbb{N}$ este asociativă.

4.
$$m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n,$$
pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Relaţia de ordine pe $\mathbb{N}$

Teoremă. *Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ avem una şi numai una dintre următoarele situaţii:*
a) $m = n$
b) există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = n + p$
c) există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = m + q$.

Definiţie. *Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin*
$$m < n,$$
dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât
$$n = m + p.$$

Observaţie. *Pe $\mathbb{N}$ putem introduce relaţia $\leq$ dată de echivalenţa*
$$n \leq m \Leftrightarrow n < m \text{ sau } n = m.$$

Conform teoremei de mai sus, $\mathbb{N}$, cu această relaţie, devine o mulţime total ordonată.

Proprietăţi.

1.
$$m < n \Rightarrow m + p < n + p$$
şi
$$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p,$$
pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

2.
$$m < n \Rightarrow m + 1 \leq n,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

3.
$$1 \leq n,$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* 1 *este prim element al lui* $\mathbb{N}$.

Teoremă. *Pentru orice submulţime nevidă* S *a lui* $\mathbb{N}$, *există* $a \in S$ *astfel încât* $a \leq x$, *pentru orice* $x \in S$ *(i.e. orice submulţime nevidă a lui* $\mathbb{N}$ *are un prim element, ceea ce înseamnă că* $\mathbb{N}$ *este bine ordonată).*

Demonstraţie. Dacă $1 \in S$, atunci demonstraţia este încheiată.
Dacă $1 \notin S$, fie
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < x \text{ pentru orice } x \in S\}.$$
Evident $1 \in B$.
Există $p \in B$ astfel încât $p + 1 \notin B$ căci altfel, conform cu AP 4, $B = \mathbb{N}$, de unde, alegând $x \in S$ (S este nevidă), rezultă contradicţia $x < x$.
Cum $p + 1 \notin B$, există $a \in S$ astfel încât
$$a \leq p + 1. \tag{1}$$
Deoarece $p \in B$, deducem că $p < x$, pentru orice $x \in S$, deci
$$p + 1 \leq x, \tag{*}$$
pentru orice $x \in S$.
În particular, avem
$$p + 1 \leq a. \tag{2}$$
Din (1) şi (2), deducem că $a = p + 1$, deci, conform cu $(*)$,
$$a \leq x,$$
pentru orice $x \in S$.
Cum $a \in S$, demonstraţia este încheiată.

Remarcă. *Alegerea propoziţiilor investite cu statul de axiomă nu este unică. Spre exemplu se poate alege un sistem de axiome în care axioma inducţiei să fie propoziţie, dar în care Teorema de mai sus să fie axiomă. Faptul*

capital care trebuie reţinut este că nu putem evita existenţa unor propoziţii cu statul de axiomă.

Remarcă. $1^{'}$ *se notează cu* 2, $2^{'}$ *se notează cu* 3, *etc.*

Notă istorică. *Giuseppe Peano* (1858-1932) a studiat la Universitatea din Torino, universitate la care va preda începând cu 1880. A fost de asemenea profesor al Academiei Militare din Torino. A publicat (în latină) în 1889 celebrele axiome care-i poartă numele. În 1890 a prezentat celebrul exemplu de curbă care umple un pătrat (adică a prezentat un exemplu de funcţie continuă şi surjectivă din $[0,1]$ în pătratul unitate). În 1891 fondează "Revista di matematica".

Mulţimi finite şi infinite

Definiţie. *Un segment iniţial, determinat de* $k \in \mathbb{N}$, *al lui* $\mathbb{N}$ *este o submulţime a lui* $\mathbb{N}$ *de forma* $\{1, 2, ..., k\}$.

Definiţie. *O mulţime* A *se numeşte finită dacă este vidă sau dacă există o bijecţie între ea şi un segment iniţial al lui* $\mathbb{N}$.

În caz contrar mulţimea se numeşte infinită.

Mulţimi numărabile şi nenumărabile; Mulţimi cel mult numărabile

Definiţie. *O mulţime* A *se numeşte numărabilă dacă există o bijecţie între ea şi* $\mathbb{N}$.

Definiţie. *O mulţime* A *se numeşte cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.*

Propoziţie. *Orice submulţime a unei mulţimi finite este finită. Orice submulţime a unei mulţimi numărabile este cel mult numărabilă.*

Teoremă. *Reuniunea unei familii finite de mulţimi finite este finită. Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

Observaţie. Vom admite, cu statutul de axiomă, următoarea afirmaţie: *Orice mulţime infinită conţine o submulţime numărabilă.*

Exerciţii. 1) Să se arate că dacă A şi B sunt mulţimi numărabile, atunci $A \times B$ este numărabilă.

2) Fie A o mulţime finită şi $f : A \to A$. Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă dacă şi numai dacă f este bijectivă.

REZUMAT

Se consideră ca noţiuni primare mulţimea $\mathbb{N}$ şi o lege care asociază oricărui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n^{'} \in \mathbb{N}$ numit succesorul lui n.

Iată axiomele lui Peano:

AP1. Orice $n \in \mathbb{N}$ are un unic succesor (deci $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dată de $s(n) = n^{'}$ este funcţie).

AP2. Există un element din $\mathbb{N}$, desemnat prin 1, care are proprietatea că $n^{'} \neq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (deci $1 \notin s(\mathbb{N})$).

AP3. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, avem $m^{'} \neq n^{'}$ (deci s este injectivă).

AP4. Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$ şi $(n \in S \Rightarrow n^{'} \in S)$, atunci $S = \mathbb{N}$.

Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m + n$ definit prin inducţie după n astfel: $m + 1 = m^{'}$şi $m + n^{'} = (m + n)^{'}$.

Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m \cdot n$ definit prin inducţie după n astfel: $m \cdot 1 = m$ şi $m \cdot n^{'} = mn + m$.

Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin $m < n$, dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = m + p$. Pe $\mathbb{N}$ putem introduce relaţia $\leq$ dată de echivalenţa $n \leq m \Leftrightarrow n < m$ sau $n = m$. $\mathbb{N}$ cu această relaţie devine o mulţime total ordonată.

Pentru orice submulţime nevidă S a lui $\mathbb{N}$ există $a \in S$ astfel încât $a \leq x$, pentru orice $x \in S$ (i.e. orice submulţime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un prim element, ceea ce înseamnă că $\mathbb{N}$ este bine ordonată).

Un segment iniţial, determinat de $k \in \mathbb{N}$, al lui $\mathbb{N}$ este o submulţime a lui $\mathbb{N}$ de forma $\{1, 2, ..., k\}$. O mulţime A se numeşte finită dacă este vidă sau dacă există o bijecţie între ea şi un segment iniţial al lui $\mathbb{N}$. În caz contrar mulţimea se numeşte infinită.

O mulţime A se numeşte numărabilă dacă există o bijecţie între ea şi $\mathbb{N}$ şi cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.

Reuniunea unei familii finite de mulţimi finite este finită. Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Orice mulţime infinită conţine o submulţime numărabilă.

Bibliografie

1. *Michael Artin*, **Algebra**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

2. *Wilfred Barnes*, **Introduction to abstract algebra**, D. C. Heath and Company, Lexinton, Massachusetts Toronto London, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 25847

3. *H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, W. Süss*, **Fundamentals of Mathematics**, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 36662

4. *I. Creangă, C. Cazacu, Gh. Opaiţ, P. Minuţ, C. Reischer*, **Introducere în teoria numerelor**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 11340

5. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York,1960 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 29636

6. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 24668

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ ca o mulţime factor a lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ generată de o anumită relaţie de echivalenţă Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}$ Relaţia de ordine în $\mathbb{Z}$ Scufundarea lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$

În scopul modelării situaţiilor în care ne vedem nevoiţi să lucrăm cu temperaturi inferioare celei la care îngheaţă apa, cu altitudini situate sub nivelului mării sau cu evenimente anterioare naşterii lui Christos, se introduce o nouă mulţime de numere, numită mulţimea numerelor întregi, mulţime care posedă o "copie" a mulţimii numerelor naturale.

Construcţia lui $\mathbb{Z}$

Faptul că o ecuaţie precum $x + 3 = 2$ nu are soluţii în $\mathbb{N}$ (fapt care se constată imediat scriind ecuaţia sub forma $2 + x + 1 = 2$) ne determină să încercăm "lărgirea" mulţimii $\mathbb{N}$ astfel încât să putem rezolva ecuaţia de mai sus în mulţimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluţii ale unei ecuaţii de tipul $x + n = m$. Vom obţine astfel mulţimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$.

Iată cum se face acest lucru:

Definiţie. *Pe mulţimea* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definim următoarea relaţie binară:*

$$(m, n) \equiv (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'.$$

Observaţie. *Definiţia relaţiei binare de mai sus, care se dovedeşte a fi o relaţie de echivalenţă, este naturală deoarece "ecuaţiile* $x + n = m$ *şi* $x + n' = m'$ *au aceeaşi soluţie dacă şi numai dacă* $m + n' = n + m'$ *".*

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *două operaţii, anume:*
- o adunare prin

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$$

- *o înmulţire prin*

$$(m,n)\cdot(m',n')=(mm'+nn',mn'+nm').$$

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii de mai sus sunt naturale dacă gândim pe (m,n) ca "soluţie a ecuaţiei $x+n=m$" deoarece un "calcul" simplu arată că din $x+n=m$ şi $y+n'=m'$ rezultă $x+y+n+n'=m+m'$ şi $xy+mn'+nm'=mm'+nn'$.*

Aceste operaţii pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sunt asociative şi comutative, iar înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Definiţie. *Definim pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\equiv$ două operaţii, anume:*

- *o adunare prin*

$$\widehat{(m,n)}+\widehat{(m',n')}=\widehat{(m+m',n+n')},$$

i.e.

$$\widehat{(m,n)}+\widehat{(m',n')}=\widehat{(m,n)+(m',n')}$$

- *o înmulţire prin*

$$\widehat{(m,n)}\cdot\widehat{(m',n')}=\widehat{(mm'+nn',mn'+nm')},$$

i.e.

$$\widehat{(m,n)}\cdot\widehat{(m',n')}=\widehat{(m,n)\cdot(m',n')}.$$

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\equiv$ sunt corecte, adică nu depind de reprezentanţii aleşi.*

Definiţie. *Mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\equiv$ înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin $\mathbb{Z}$, iar elementele sale se numesc numere întregi.*

Observaţie. *Aşadar un număr întreg este o clasă de echivalenţă.*

Despre adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}$

Se constată cu uşurinţă că adunarea în $\mathbb{Z}$ este asociativă şi comutativă.

$\widehat{(1,1)} \stackrel{not}{=} 0$ *este element neutru la adunare, i.e.*

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Z}$ *cu reprezentantul* (m, n) *definim* $-\alpha = \widehat{(n, m)}$*; atunci*

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$, *deci* $-\alpha$ *este opusul lui* α *relativ la adunarea în* $\mathbb{Z}$.

Prin urmare $(\mathbb{Z}, +)$ *este grup abelian.*

Se constată cu uşurinţă că înmulţirea în $\mathbb{Z}$ *este asociativă, comutativă şi distributivă faţă de adunarea în* $\mathbb{Z}$.

$\widehat{(2,1)} \stackrel{not}{=} 1$ *este element neutru la înmulţire, i.e.*

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Proprietăţi.

1.

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2.

$$\alpha(-\beta) = -\alpha\beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

3.

$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

4.

$$\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

5.

$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \text{ şi } \gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

6.

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

Observaţie

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *este domeniu de integritate.*

2. *În $\mathbb{Z}$, ecuaţia considerată la începutul acestei secţiuni, anume $x+3=2$ are soluţia -1.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{Z}$

Să observăm că elementele lui $\mathbb{Z}$ diferite de 0 sunt mulţimile de forma $\{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sau $\{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $r, s \in \mathbb{N}$.

Definiţie. *Spunem că $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ este pozitiv dacă $u > v$, adică dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Spunem că $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ este negativ dacă $u < v$, adică dacă există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Observaţie.

1. *Orice număr întreg este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.*

2. *Suma şi produsul a două numere întregi pozitive sunt pozitive.*

Definiţie. *Spunem că numărul întreg α este mai mic decât numărul întreg β şi notăm această situaţie prin $\alpha < \beta$ dacă există un numărul întreg pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.*

Observaţie. *Relaţia binară pe $\mathbb{Z}$ dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$, este o relaţie de ordine totală.*

Proprietăţi. *Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, avem:*
1. $\alpha > 0$ *dacă şi numai dacă* α *este pozitiv*
2. $\alpha < 0$ *dacă şi numai dacă* α *este negativ*
3. $\alpha < \beta$ *dacă şi numai dacă* $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
4. $\alpha < \beta$ *şi* $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
5. $\alpha < \beta$ *şi* $\gamma < 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Scufundarea lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dată de

$$f(p) = (1 \hat{+} p, 1),$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are proprietăţile:

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

$$p < q \Rightarrow f(p) < f(q),$$

pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$.

Prin urmare f este injectivă şi ca atare putem identifica $p \in \mathbb{N}$ cu $f(p) \in \mathbb{Z}$, deci f este o scufundare a lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$.

Propoziţie. *$\mathbb{Z}$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Totul decurge din egalitatea

$$\mathbb{Z} = \{-n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Exerciţiu. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dată de

$$f(z) = \{ \begin{array}{ll} 2z, & \text{dacă } z \geq 0 \\ -1-2z, & \text{dacă } z < 0 \end{array},$$

este bijectivă.

REZUMAT

Pe mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim următoarea relaţie binară: $(m, n) \equiv (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$.

Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ două operaţii, anume: o adunare prin $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$ **şi o înmulţire prin** $(m, n) \cdot (m', n') = (mm' + nn', mn' + nm')$.

Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ două operaţii, anume: o adunare prin $\widehat{(m,n)} \,\widehat{+}\, \widehat{(m',n')} = \widehat{(m,n)+(m',n')}$ şi o înmulţire prin $\widehat{(m,n)} \cdot \widehat{(m',n')} = \widehat{(m,n)\cdot(m',n')}$.

Mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin $\mathbb{Z}$, iar elementele sale se numesc numere întregi.

Spunem că $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ este pozitiv dacă $u > v$, adică dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Spunem că $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ este negativ dacă $u < v$, adică dacă există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Spunem că numărul întreg α este mai mic decât numărul întreg β şi notăm această situaţie prin $\alpha < \beta$ dacă există un numărul întreg pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Relaţia binară pe $\mathbb{Z}$ dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$, este o relaţie de ordine totală.

Aplicaţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dată de

$$f(p) = \widehat{(1+p,1)},$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}$ este injectivă şi ca atare putem identifica $p \in \mathbb{N}$ cu $f(p) \in \mathbb{Z}$, deci f este o scufundare a lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ este numărabilă.

Bibliografie

1. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York,1960 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 29636

2. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 24668

MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ca o mulţime factor a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ generată de o anumită relaţie de echivalenţă
Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Q}$
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ
Relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$
Scufundarea lui $\mathbb{Z}$ în $\mathbb{Q}$
Relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$ nu este completă
$\mathbb{Q}$ este numărabilă

Întregii au apărut ca abstracţii în procesul numărării unor colecţii finite de obiecte. Însă în viaţa de toate zilele trebuie nu numai să numărăm obiecte individuale, dar să şi măsurăm cantităţi, ca de pildă lungimea, aria, greutatea şi timpul. Dacă vrem să operăm cu uşurinţă cu rezultatele măsurătorilor acestor cantităţi, care admit subdivizări oricât de fine, este necesar să extindem limitele aritmeticii dincolo de întregi. (Ce este matematica?, de R. Courant şi H. Robbins, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pagina 68).

Construcţia lui $\mathbb{Q}$

Faptul că o ecuaţie precum $x \cdot 2 = 3$ nu are soluţii în $\mathbb{Z}$ ne determină să încercăm "lărgirea" mulţimii $\mathbb{Z}$ astfel încât să putem rezolva ecuaţia de mai sus în mulţimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluţii ale unei ecuaţii de tipul $x \cdot n = m$. Vom obţine astfel mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$.

Iată cum se face acest lucru:

Fie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Definiţie. *Pe mulţime*a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *definim următoarea relaţie binară:*

$$(p, q) \equiv (p', q') \Leftrightarrow p \cdot q' = q \cdot p'.$$

Observaţie. *Definiţia relaţiei binare de mai sus, care se dovedeşte a fi o relaţie de echivalenţă, este naturală deoarece "ecuaţiile* $x \cdot q = p$ *şi* $x \cdot q' = p'$ *au aceeaşi soluţie dacă şi numai dacă* $p \cdot q' = q \cdot p'$*".*

În conformitate cu tradiţia vom nota perechea $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *cu* $\frac{p}{q}$.
Deci $\frac{p}{q}\equiv\frac{p'}{q'}$ *dacă şi numai* $p\cdot q'=q\cdot p'$.

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *două operaţii, anume:*
- o adunare prin

$$\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+p'q}{qq'}$$

- o înmulţire prin

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}=\frac{pp'}{qq'}.$$

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii de mai sus sunt naturale dacă gândim pe* $\frac{p}{q}$ *ca "soluţie a ecuaţiei* $x\cdot q=p$*" deoarece un "calcul" simplu arată că din* $x\cdot q=p$ *şi* $y\cdot q'=p'$ *rezultă* $(x+y)\cdot qq'=pq'+p'q$ *şi* $xy\cdot qq'=pp'$.

Aceste operaţii pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *sunt asociative şi comutative, iar înmulţirea este distributivă faţă de adunare.*

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\equiv$ *două operaţii, anume:*
- o adunare prin

$$\widehat{\frac{p}{q}}+\widehat{\frac{p'}{q'}}=\widehat{\frac{pq'+p'q}{qq'}},$$

i.e.

$$\widehat{\frac{p}{q}}+\widehat{\frac{p'}{q'}}=\widehat{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}$$

- o înmulţire prin

$$\widehat{\frac{p}{q}}\cdot\widehat{\frac{p'}{q'}}=\widehat{\frac{pp'}{qq'}},$$

i.e.

$$\widehat{\frac{p}{q}}\cdot\widehat{\frac{p'}{q'}}=\widehat{\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}}.$$

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii pe* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\equiv$ *sunt corecte, adică nu depind de reprezentanţii aleşi.*

Definiţie. *Mulţimea* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ *înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin* $\mathbb{Q}$*, iar elementele sale se numesc numere raţionale.*

Observaţie. *Aşadar un număr raţional este o clasă de echivalenţă.*

Despre adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Q}$

Se constată cu uşurinţă că adunarea în $\mathbb{Q}$ *este asociativă şi comutativă.*
$\widehat{\frac{0}{1}} \overset{not}{=} 0$ *este element neutru la adunare, i.e.*

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Q}$ *cu reprezentantul* $\frac{p}{q}$ *definim* $-\alpha = \widehat{-\frac{p}{q}}$*; atunci*

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$*, deci* $-\alpha$ *este opusul lui* α *relativ la adunarea în* $\mathbb{Q}$.

Prin urmare $(\mathbb{Q}, +)$ *este grup abelian.*

Se constată cu uşurinţă că înmulţirea în $\mathbb{Q}$ *este asociativă, comutativă şi distributivă faţă de adunarea în* $\mathbb{Q}$.

$\widehat{\frac{1}{1}} \overset{not}{=} 1$ *este element neutru la înmulţire, i.e.*

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$*, cu reprezentantul* $\frac{p}{q}$*, definim* $\frac{1}{\alpha} = \widehat{\frac{q}{p}} \in \mathbb{Q}$*; se constată că* $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$*, pentru orice* $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$*, deci* $\frac{1}{\alpha}$ *este inversul lui* α *relativ la înmulţirea în* $\mathbb{Q}$.

Din cele de mai sus decurge următoarea:

Observaţie. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *este corp comutativ.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$

Definiţie. *Spunem că un număr raţional* $\alpha = \widehat{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}$ *este pozitiv (negativ) dacă* $pq > 0$ (< 0).

Observaţie.

1. *Definiţia de mai sus este corectă, adică nu depinde de reprezentantul ales.*

2. *Orice număr raţional este fie* 0*, fie pozitiv, fie negativ.*

Definiţie. *Spunem că numărul raţional* α *este mai mic decât numărul raţional* β*, şi notăm această situaţie prin* $\alpha < \beta$*, dacă există un număr raţional pozitiv* γ *astfel încât* $\alpha + \gamma = \beta$*.*

Observaţie. *Relaţia binară pe* $\mathbb{Q}$ *dată de* $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ *sau* $\alpha = \beta$ *este o relaţie de ordine totală.*

Proprietăţi. *Pentru orice* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$*, avem:*

1. $\alpha > 0$ *dacă şi numai dacă* α *este pozitiv;*

2. $\alpha < 0$ *dacă şi numai dacă* α *este negativ;*

3. $\alpha < \beta$ *dacă şi numai dacă* $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$;

4. $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0$ *implică* $\alpha \cdot \beta > 0$;

5. $\alpha < \beta$ *şi* $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$;

6. $\alpha < \beta$ *şi* $\gamma < 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$;

7. *dacă* $\alpha < \beta$*, atunci mulţimea* $\{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha < x < \beta\}$ *este infinită;*

8. *ecuaţia* $x^2 = 2$ *nu are soluţii în* $\mathbb{Q}$;

9. *există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\alpha < n$*.*

Scufundarea lui $\mathbb{Z}$ în $\mathbb{Q}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *dată de*

$$f(p) = \widehat{\frac{p}{1}},$$

pentru orice $p \in \mathbb{Z}$*, are proprietăţile:*

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

$$p < q \Rightarrow f(p) < f(q),$$

pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$*.*

Prin urmare f *este injectivă şi ca atare putem identifica* $p \in \mathbb{Z}$ *cu* $f(p) \in \mathbb{Q}$*, deci* f *este o scufundare a lui* $\mathbb{Z}$ *în* $\mathbb{Q}$*.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$ nu este completă

Teoremă. *Nu orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară (i.e. relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$ nu este completă).*

Demonstraţie. Fie

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0, x \geq 0, x^2 < 2\}.$$

Deoarece $1 \in A$, deducem că $A \neq \varnothing$.

Evident 2 este un majorant al lui A.

Nu există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$.

Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, să observăm că $a \geq 1$.

Ne putem plasa în una şi numai una dintre următoarele două situaţii:

A. $a^2 < 2$

B. $a^2 > 2$.

Dacă ne situăm în situaţia A, considerăm

$$b = \frac{2 - a^2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

Vom arăta că $a + b \in A$, de unde, deoarece a este majorant al lui A, obţinem $a + b \leq a$, inegalitate care conduce la contradicţia $b \leq 0$.

Rămâne să arătăm că $a + b \in A$, i.e.

$$(a + b)^2 < 2.$$

În acest scop, să observăm că

$$b(a+1)^2 = \frac{2 - a^2}{2} < 1,$$

deci

$$b < \frac{1}{(a+1)^2} < 1.$$

Atunci

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + 2ab + b <$$

$$< a^2 + 2ab + b + a^2 b = a^2 + b(a+1)^2 = \frac{a^2 + 2}{2} < 2.$$

Dacă ne situăm în situaţia B, considerăm

$$c = \frac{a^2 - 2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

Vom arăta că $a-c$ este majorant al lui A, deci $a \leq a-c$, inegalitate care conduce la contradicţia $c \leq 0$.

Rămâne să arătăm că
$$x \leq a-c,$$
pentru orice $x \in A$.

Cum
$$x^2 < 2,$$
pentru orice $x \in A$, este suficient să arătăm că
$$2 < (a-c)^2.$$

Să observăm că
$$c < 1,$$
fapt echivalent cu
$$0 < (a+2)^2.$$

Atunci
$$(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 > a^2 - 2ac - c^2 >$$
$$> a^2 - 2ac - c > a^2 - 2ac - c - a^2 c = a^2 - c(a+1)^2 =$$
$$= \frac{a^2+2}{2} > 2.$$

În acest mod demonstraţia este încheiată.

$\mathbb{Q}$ este numărabilă

Propoziţie. *$\mathbb{Q}$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Deoarece
$$\mathbb{Q} = \underset{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}{\cup} A_n,$$
unde
$$A_0 = \{0\}$$
şi
$$A_n = \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, -\frac{3}{n}, ...\},$$
deducem că $\mathbb{Q}$ este cel mult numărabilă.

Cum $\mathbb{Q}$ este infinită, deducem că $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

REZUMAT

Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definim următoarea relaţie binară: $(p,q) \equiv (p^{'},q^{'}) \Leftrightarrow p \cdot q^{'} = q \cdot p^{'}$.

Definim pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ două operaţii, anume: o adunare prin $\frac{p}{q} + \frac{p^{'}}{q^{'}} = \frac{pq^{'}+p^{'}q}{qq^{'}}$ **şi o înmulţire prin** $\frac{p}{q} \cdot \frac{p^{'}}{q^{'}} = \frac{pp^{'}}{qq^{'}}$.

Definim pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ două operaţii, anume: o adunare prin $\hat{\frac{p}{q}} + \hat{\frac{p^{'}}{q^{'}}} = \widehat{\frac{p}{q} + \frac{p^{'}}{q^{'}}}$ **şi o înmulţire prin** $\hat{\frac{p}{q}} \cdot \hat{\frac{p^{'}}{q^{'}}} = \widehat{\frac{p}{q} \cdot \frac{p^{'}}{q^{'}}}$.

Mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin $\mathbb{Q}$, iar elementele sale se numesc numere raţionale.

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ **este corp comutativ**

Spunem că un număr raţional $\alpha = \hat{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}$ este pozitiv (negativ) dacă $pq > 0$ (< 0).

Spunem că numărul raţional α este mai mic decât numărul raţional β, şi notăm această situaţie prin $\alpha < \beta$, dacă există un numărul raţional pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Relaţia binară pe $\mathbb{Q}$ dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$, este o relaţie de ordine totală.

Aplicaţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dată de $f(p) = \hat{\frac{p}{1}}$, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, este injectivă şi ca atare putem identifica $p \in \mathbb{Z}$ cu $f(p) \in \mathbb{Q}$, deci f este o scufundare a lui $\mathbb{Z}$ în $\mathbb{Q}$.

Corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale nu este complet ordonat; mai precis, nu orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară.

$\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Bibliografie

1. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York,1960 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 29636

2. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 24668

MULŢIMEA NUMERELOR REALE $\mathbb{R}$

Tăietură în $\mathbb{Q}$
Tăietură în $\mathbb{Q}$ de prima şi de a doua speţă
$\mathbb{R}$ ca mulţime factor a mulţimii tuturor tăieturilor în $\mathbb{Q}$
Adunarea pe $\mathbb{R}$
Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$
Înmulţirea pe $\mathbb{R}$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ
Scufundarea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$
Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă

Consideraţiile care constituie obiectul acestei mici scrieri datează din toamna anului 1858. Mă găseam pe atunci, ca profesor la Politehnica confederată de la Zürich, pentru prima oară în situaţia de a trebui să expun elementele calculului diferenţial şi am simţit cu această ocazie, mai acut ca oricând, lipsa unei baze ştiinţifice a aritmeticii. Pentru conceptul de apropiere a unei mărimi variabile de o valoare limită fixă şi îndeosebi pentru demonstarea propoziţiei că orice mărime care creşte constant, dar nu peste orice limită, trebuie desigur să se apropie de o valoare limită, am recurs la evidenţe geometrice. Şi astăzi socotesc această folosire a intuiţiei geometrice în primul stadiu al predării calculului diferenţial ca extraordinar de utilă, ba chiar indispensabilă, din punct de vedere didactic, când vrem să nu pierdem prea mult timp. Dar nimeni nu va tăgădui că acest fel de introducere în calculul diferenţial nu poate revendica o valoare ştiinţifică. Pe atunci, pentru mine acest sentiment de nesatisfacţie a fost aşa de puternic încât am luat hotărârea fermă să reflectez tot timpul, până când voi fi găsit o fundamentare pur aritmetică şi total riguroasă a principiilor analizei infinitezimale. Se spune aşa de des că obiectul calculului diferenţial ar fi mărimile continue şi totuşi nicăieri nu se dă o explicaţie a acestei continuităţi şi chiar cele mai riguroase expuneri ale calculului diferenţial nu-şi bazează demonstraţiile pe continuitate, ci ele apelează sau la reprezentări geometrice mai mult sau mai puţin conştiente, sau la reprezentări provocate de geometrie, sau aceste expuneri se sprijină pe propoziţii care nu sunt demonstrate niciodată pur aritmetic. Din această categorie face parte, de pildă, propoziţia menţionată mai sus, şi o cercetare mai precisă m-a convins

că această propoziţie, sau chiar oricare propoziţie echivalentă, poate fi privită oarecum ca un fundament suficient pentru analiza infinitezimală. Este numai vorba să se descopere adevărata sa origine în elementele aritmeticii, şi astfel să se obţină, în acelaşi timp, o definiţie reală a naturii continuităţii. acest lucru mi-a reuşit la 24 noiembrie 1858. (Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, paginile 253-254).

Construcţia lui $\mathbb{R}$

Faptul că o ecuaţie precum $x^2 = 2$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$ ne determină să încercăm "lărgirea" mulţimii $\mathbb{Q}$ astfel încât să putem rezolva ecuaţia de mai sus în mulţimea lărgită. Vom obţine astfel mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$.

Definiţie. *Un cuplu* (I, II) *de mulţimi disjuncte de numere raţionale cu proprietăţile*:

1. *pentru orice* $a \in I$ *şi orice* $a^{'} \in \mathbb{Q}$ *astfel încât* $a^{'} < a$, *avem* $a^{'} \in I$;

2. *pentru orice* $A \in II$ *şi orice* $A^{'} \in \mathbb{Q}$ *astfel încât* $A < A^{'}$, *avem* $A^{'} \in II$;

3. *pentru orice* $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, *există* $a \in I$ *şi* $A \in II$ *astfel încât* $A - a < r$, *se numeşte tăietură (în* $\mathbb{Q}$*).*

I se numeşte prima clasă a tăieturii, iar II se numeşte a doua clasă a tăieturii.

Dacă s este o tăietură, atunci notăm prima clasa a sa prin I_s, iar pe cea de-a doua prin II_s.

Un număr raţional c se zice clasat în raport cu tăietura s dacă $c \in I_s$ sau $c \in II_s$.

Această noţiune, în esenţa sa, a fost introdusă de Dedekind, în 1872, într-un articol intitulat "Stetigkeit und irrazionale Zahlen".

Notă istorică. *Richard Dededekind* s-a născut în 1831 la Braunschweig, Germania. A frecventat şcoala Martino-Catharineum din Brunswick unde, pentru început, acordă o atenţie sporită fizicii şi chimiei. Ulterior atenţia sa se îndreaptă către matematică. În 1850 se înscrie la Universitatea din Göttingen, având o solidă pregătire matematică dobândită în timpul frecventării, începând cu anul 1848, a colegiului Carolinum. La Göttingen îi are ca profesori pe Gauss, Dirichlet şi pe Weber. În 1852 obţine de la această universitate un doctorat, sub direcţia lui Gauss. În 1855 devine titularul catedrei rămase libere prin moartea lui Gauss. Din 1858 se mută la Politehnica din Zürich.

Aici, predând pentru prima dată un curs de calcul diferenţial şi integral, este condus la construcţia numerelor reale prin tăieturi. Din 1860 devine profesor la Politehnica din Brunswick, de unde se şi pensionează în 1894. El a introdus noţiunea de ideal, noţiune care este de o importanţă capitală în algebră. Pe lângă conceptele introduse şi rezultatele obţinute, Dedekind a marcat matematica prin abilitatea sa de a-şi exprima extrem de clar ideile, fapt care a introdus un nou stil în matematică, stil care a avut o influenţă majoră asupra generaţiilor următoare de matematicieni. A fost membru al Academiei din Göttingen (din 1862), a celei din Berlin (din 1880), al celei din Roma, precum şi al Academiei de Ştiinţe din Paris (din 1900). A murit în 1916.

Dedekind rămâne în istoria matematicii prin cel puţin două contribuţii esenţiale, anume prin definirea numerelor iraţionale cu ajutorul tăieturilor şi prin introducerea noţiunii de ideal.

Lemă. *Fie* $I, II \subseteq \mathbb{Q}$ *astfel încât* $I \cap II = \emptyset$, $I, II \neq \emptyset$ *şi* $I \cup II = \mathbb{Q}$.

Dacă sunt verificate condiţiile 1 *şi* 2 *din definiţia tăieturii, atunci* (I, II) *este o tăietură.*

Proprietăţi. *Fie* s *o tăietură.*

1. *Dacă* $a \in I_s$ *şi* $A \in II_s$, *atunci* $a < A$.

2. *Există cel mult un număr raţional neclasat în raport cu* s.

3. *Dacă* $l \in \mathbb{Q}$ *nu este clasat în raport cu* s, *atunci*

$$I_s = \{a \in \mathbb{Q} \,|a < l\}$$

şi

$$II_s = \{A \in \mathbb{Q} \,|l < A\}.$$

4. *Dacă toate numerele raţionale sunt clasate în raport cu* s, *atunci ne situăm în unul şi numai unul dintre cazurile următoare:*

a) I_s *are un cel mai mare element &* II_s *nu are un cel mai mic element;*

b) I_s *nu are un cel mai mare element &* II_s *are un cel mai mic element;*

c) I_s *nu are un cel mai mare element &* II_s *nu are un cel mai mic element.*

Definiţie. *O tăietură* s *în raport cu care toate numerele raţionale sunt clasate şi astfel încât* I_s *nu are un cel mai mare element şi* II_s *nu are un cel mai mic element, se numeşte tăietură de speţa a doua.*

O tăietură în $\mathbb{Q}$ *care nu este de speţa a doua, se numeşte tăietură de prima speţă.*

Exemple:

1. (I, II), unde

$$I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \text{ şi } a^2 < 2\}$$

şi

$$II = \{A \in \mathbb{Q} \mid 2 < A^2\},$$

este o tăietură de speţa a doua.

2. Pentru $r \in \mathbb{Q}$, cuplurile

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r \leq A\}),$$

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$$

şi

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$$

sunt tăieturi de prima speţă, numite tăieturile determinate de r.

Vom nota oricare dintre aceste trei tăieturi cu (r).

Propoziţie. *Dacă* $l, l' \in \mathbb{Q}$ *şi* $l \neq l'$, *atunci* $(l) \neq (l')$.

Propoziţie. *Orice tăietură de prima speţă este o tăietură determinată de un număr raţional.*

Propoziţie. *Fie* $l \in \mathbb{Q}$ *şi* s o *tăietură în* $\mathbb{Q}$. *Dacă pentru orice* $a \in I_s$ *şi orice* $A \in II_s$, *avem* $a \leq l \leq A$, *atunci* s *este una dintre tăieturile determinate de* l.

Notaţie. *Prin* τ *vom desemna mulţimea tăieturilor în* $\mathbb{Q}$.

Observaţie. *Relaţia binară pe* τ *dată de:*

$$s \equiv t$$

dacă ($s = t$ *atunci când* s *şi* t *sunt de speţa a doua) sau* (s *şi* t *sunt determinate de acelaşi număr raţional atunci când* s *şi* t *sunt de prima speţă)*

este o relaţie de echivalenţă.

Notaţie. *Mulţimea* $\tau / \equiv$ *se va nota cu* $\mathbb{R}$, *iar elementele sale se numesc numere reale.*

Observaţie. *Pentru $r \in \mathbb{Q}$, notăm cu $\hat{r}$ clasa de echivalenţă a unei tăieturi în $\mathbb{Q}$ determinate de r.*

Evident, $r = r^{'}$ dacă şi numai dacă $\hat{r} = \hat{r^{'}}$, unde $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$.

Adunarea pe $\mathbb{R}$

Definiţie. *Pe τ definim o adunare astfel:*
dacă $s, t \in \tau$, atunci

$$s + t = (I_{s+t}, II_{s+t}),$$

unde

$$I_{s+t} = \{a + b \mid a \in I_s \text{ şi } b \in I_t\}$$

şi

$$II_{s+t} = \{A + B \mid A \in II_s \text{ şi } B \in II_t\}.$$

Se constată că $s + t \in \tau$.

Observaţie. *Dacă $s \in \tau$, atunci $(\{-A \mid A \in II_s\}, \{-a \mid a \in I_s\})$ este o tăietură notată cu $-s$.*
Dacă s este determinată de $r \in \mathbb{Q}$, atunci $-s$ este determinată de $-r$.

Propoziţie. *Dacă $s, s^{'} \in \tau$ sunt determinate de r, respectiv $r^{'}$, atunci $s + s^{'}$ este determinată de $r + r^{'}$.*

Propoziţie. *Fie*

$$s = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\}),$$

$$s^{'} = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l \leq A\})$$

şi

$$s^{''} = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\})$$

cele trei tăieturi în $\mathbb{Q}$ determinate de $l \in \mathbb{Q}$, iar t o tăietură în $\mathbb{Q}$ de speţa a doua.
Atunci

$$s + t = s^{'} + t = s^{''} + t.$$

Definiţie. *Definim adunarea pe* $\mathbb{R}$ *prin:*

$$\hat{s} + \hat{t} = \widehat{s + t},$$

unde $s, t \in \tau$.

Observaţie. *Ultimele două propoziţii arată că adunarea pe* $\mathbb{R}$ *este bine definită. Evident ea este asociativă şi comutativă.*

Propoziţie. *Dacă* 0 *este clasa de echivalenţă a unei tăieturi în* $\mathbb{Q}$ *determinate de* $0 \in \mathbb{Q}$, *atunci*

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propoziţie. *Dacă* $\alpha = \hat{s}$, *unde* $s \in \tau$, *notăm* $-\alpha = \widehat{-s}$.
Atunci

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observaţie. *Pe* $\mathbb{R}$ *se poate defini operaţia de scădere astfel:*

$$x - y \overset{def}{=} x + (-y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Observaţie. $(\mathbb{R}, +)$ *este grup abelian.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$

Definiţie. *O tăietură în* $\mathbb{Q}$ *se numeşte pozitivă (negativă) atunci când în prima clasă (în a doua clasă) a sa se află un număr raţional pozitiv (negativ).*

Notaţie. *Vom nota cu* τ_+ *mulţimea tăieturilor pozitive.*

Propoziţie. *O tăietură în* $\mathbb{Q}$ *este fie pozitivă, fie negativă, fie determinată de* 0.

Propoziţie. *Dacă* s *este una dintre tăieturile determinate de* $l \in \mathbb{Q}$, *atunci* s *este pozitivă (negativă) dacă şi numai dacă* $l > 0$ $(l < 0)$.

Propoziţie. *Suma a două tăieturi pozitive (negative) este o tăietură pozitivă (negativă).*

Definiţie. *Un număr real se numeşte pozitiv (negativ) atunci când are ca reprezentant o tăietură pozitivă (negativă).*

Observaţie.

1. *Definiţia de mai sus este corectă (adică nu depinde de reprezentantul ales).*

2. *Suma a două numere reale pozitive (negative) este un număr real pozitiv (negativ).*

Definiţie. *Definim pe $\mathbb{R}$ următoarea relaţie binară: pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, spunem că $\alpha < \beta$ dacă există $\gamma \in \mathbb{R}$, γ pozitiv, astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.*

Relaţie binară pe $\mathbb{R}$ dată de: $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ se dovedeşte a fi o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{R}$.

Notaţie. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \leq y$, vom folosi următoarele notaţii:*

$$(x, \infty) \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y > x\},$$

$$[x, \infty) \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\},$$

$$(-\infty, x) \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\},$$

$$(-\infty, x] \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\},$$

$$[x, y] = \{u \in \mathbb{R} \mid x \leq u \leq y\},$$

$$[x, y) = \{u \in \mathbb{R} \mid x \leq u < y\},$$

$$(x, y] = \{u \in \mathbb{R} \mid x < u \leq y\}$$

şi

$$(x, y) = \{u \in \mathbb{R} \mid x < u < y\}.$$

Proprietăţi.

1.

$$\alpha < \beta \text{ dacă şi numai dacă } \alpha + \gamma < \beta + \gamma,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. *Dacă* $l, l' \in \mathbb{Q}$ *astfel încât* $l < l'$, *atunci orice tăietură determinată de* l *este mai mică decît orice tăietură determinată de* l'.

3. *Fie* $\alpha = \hat{s} \in \mathbb{R}$, *unde* $s \in \tau$; *atunci:*

a) $a \in I_s \Rightarrow \hat{a} \leq \alpha$

b) $A \in II_s \Rightarrow \alpha \leq \hat{A}$.

4. *Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *astfel încât* $\alpha < \beta$, *există* $l \in \mathbb{Q}$ *astfel încât* $\alpha < \hat{l} < \beta$.

5. *Fie* $s, t \in \tau$ *astfel încât* $I_s \subseteq I_t$ *şi* $II_s \subseteq II_t$; *atunci* $\hat{s} = \hat{t}$.

6. *Fie* $\alpha = \hat{s} \in \mathbb{R}$, *unde* $s \in \tau$ *şi* $\beta \in \mathbb{R}$; *atunci:*

a) dacă $\hat{a} \leq \beta$, *pentru orice* $a \in I_s$, *atunci* $\alpha \leq \beta$;

b) dacă $\beta \leq \hat{A}$, *pentru orice* $A \in II_s$, *atunci* $\beta \leq \alpha$.

Înmulţirea pe $\mathbb{R}$

Definiţie. *Pe* τ_+ *definim o înmulţire astfel:*
dacă $s, t \in \tau_+$, *atunci*

$$s \cdot t = (I_{st}, II_{st}),$$

unde

$$I_{st} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in I_s,\, a > 0 \text{ şi } b \in I_t, b > 0\}$$

şi

$$II_{s+t} = \{AB \mid A \in II_s \text{ şi } B \in II_t\}.$$

Se constată că $s \cdot t \in \tau$.

Observaţie. *Se constată că* $s \cdot t$ *este pozitivă şi că înmulţirea în* τ_+ *este asociativă şi comutativă.*

Observaţie. *Pentru* $s \in \tau_+$, *definim tăietura, notată* s^{-1}, *dată de* $(I_{s^{-1}}, II_{s^{-1}})$, *unde*

$$I_{s^{-1}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{\frac{1}{A} \mid A \in II_s\}$$

şi

$$II_{s^{-1}} = \{\frac{1}{a} \mid a \in I_s \text{ şi } a > 0\}.$$

Evident $s^{-1} \in \tau_+$.

Proprietăţi.

1. *Dacă* $s \in \tau_+$, *atunci* $s \cdot s^{-1} = (1)$.

2. *Dacă* $s, t, u \in \tau_+$, *atunci* $s \cdot (t+u) = s \cdot t + s \cdot u$.

3. *Dacă* s, $s^{'}$ *şi* $s^{''}$ *sunt cele trei tăieturi determinate de* $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, *iar* t *este o tăietură de speţa a doua, atunci* $s \cdot t = s^{'} \cdot t = s^{''} \cdot t$ *este o tăietură de speţa a doua.*

4. *Dacă* $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$, $r, r^{'} > 0$, *atunci* $(r) \cdot (r^{'}) = (rr^{'})$.

Definiţie. *Definim înmulţirea în* $\mathbb{R}$ *astfel:*

$$\alpha \cdot \beta = \{ \begin{array}{cc} \hat{st}, & \alpha, \beta > 0 \\ -\alpha \cdot (-\beta), & \alpha > 0, \beta < 0 \\ -(-\alpha) \cdot \beta, & \alpha < 0, \beta > 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0, & \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0 \end{array} ,$$

unde $\alpha = \hat{s}$ *şi* $\beta = \hat{t}$, $s, t \in \tau$.

Observaţie.

1. *Definiţia de mai sus este corectă.*

2. *Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *avem:* $\alpha \cdot \beta = 0$ *dacă şi numai dacă* $\alpha = 0$ *sau* $\beta = 0$.

3. ***Regula semnelor***:

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$$

şi

$$(-\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta) = -\alpha \cdot \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. *Înmulţirea în* $\mathbb{R}$ *este asociativă, comutativă şi distributivă faţă de adunarea în* $\mathbb{R}$.

Proprietăţi.

1.

$$\alpha \cdot \hat{1} = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *Pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, *există* $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$, *astfel încât*

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \hat{1}.$$

deci $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *este grup comutativ.*

3.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

4. *Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *avem:*

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0.$$

Prin urmare, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi pentru orice* $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, *avem*

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha y \leq \beta y.$$

Observaţie. *Pe* $\mathbb{R}$ *se poate defini operaţia de împărţire astfel:*

$$\frac{x}{y} \overset{def}{=} x \cdot \frac{1}{y},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Remarcă. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *este corp comutativ.*

Scufundarea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$f(r) = \hat{r},$$

pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, *are proprietăţile:*

$$f(r + r^{'}) = f(r) + f(r^{'}),$$

$$f(rr^{'}) = f(r)f(r^{'}),$$

$$r < r^{'} \Rightarrow f(r) < f(r^{'}),$$

pentru orice $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare f este injectivă şi ca atare putem identifica $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) \in \mathbb{R}$, deci f este o scufundare a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$.

Definiţie. *Elementele mulţimii $\mathbb{R} - f(\mathbb{Q})$ se numesc numere iraţionale.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă

Teoremă (care marchează una dintre deosebirile esenţiale dintre $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$) *Orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ are margine superioară (i.e. relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă).*

Demonstraţie. Fie A o submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$.

Prin urmare, există $\alpha \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$x \leq \alpha,$$

pentru orice $x \in A$.

Fie

$$I = \{r \in \mathbb{Q} \mid \text{există } x^{'} \in A \text{ astfel încât } r < x^{'}\}$$

şi

$$II = \{r \in \mathbb{Q} \mid x \leq r, \text{ pentru orice } x \in A\}.$$

Să observăm că $II \neq \varnothing$ (deoarece $\alpha \in II$), $I \cap II = \varnothing$, $I \cup II = \mathbb{Q}$ şi că sunt verificate primele două proprietăţi din definiţia tăieturii, deci (I, II) este o tăietură pe care o vom nota cu s.

Fie $M = \hat{s}$.

Vom arăta că M este marginea superioară a lui A.

Într-adevăr, M este majorant al lui A, deoarece, în caz contrar, există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Atunci există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M < r < x$, deci $r \in I$ şi drept urmare obţinem contradicţia $r \leq M$.

De asemenea M este cel mai mic majorant al lui A.

Într-adevăr, dacă presupunem că există M_1 majorant al lui A, astfel încât $M_1 < M$, alegem $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M_1 < r < M$. Atunci $r \in II$ (deoarece $x \leq M_1 < r$, pentru orice $x \in A$), de unde contradicţia $M \leq r$.

REZUMAT

Un cuplu (I, II) de mulţimi disjuncte de numere raţionale cu proprietăţile:

1. pentru orice $a \in I$ şi orice $a^{'} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a^{'} < a$, avem $a^{'} \in I$;

2. pentru orice $A \in II$ şi orice $A^{'} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $A < A^{'}$, avem $A^{'} \in II$;

3. pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, există $a \in I$ şi $A \in II$ astfel încât $A - a < r$,

se numeşte tăietură (în $\mathbb{Q}$).

I se numeşte prima clasă a tăieturii, iar II se numeşte a doua clasă a tăieturii.

Dacă s este o tăietură, atunci notăm prima clasa a sa prin I_s, iar pe cea de-a doua prin II_s.

Un număr raţional c se zice clasat în raport cu tăietura s dacă $c \in I_s$ sau $c \in II_s$.

O tăietură s, în raport cu care toate numerele raţionale sunt clasate şi astfel încât I_s nu are un cel mai mare element şi II_s nu are un cel mai mic element, se numeşte tăietură de speţa a doua. O tăietură în $\mathbb{Q}$ care nu este de speţa a doua, se numeşte tăietură de prima speţă.

Pentru $r \in \mathbb{Q}$, cuplurile $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r \leq A\})$, $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$, şi $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$ sunt tăieturi de prima speţă, numite tăieturile determinate de r. Vom nota oricare dintre aceste trei tăieturi cu (r).

Prin τ vom desemna mulţimea tăieturilor în $\mathbb{Q}$. Relaţia binară pe τ dată de: $s \equiv t$ dacă ($s = t$ atunci când s şi t sunt de speţa a doua) sau (s şi t sunt determinate de acelaşi număr raţional atunci când s şi t sunt de prima speţă), este o relaţie de echivalenţă. Mulţimea $\tau/\equiv$ se va nota cu $\mathbb{R}$, iar elementele sale se numesc numere reale. Pentru $r \in \mathbb{Q}$, notăm cu $\hat{r}$ clasa de echivalenţă a unei tăieturi în $\mathbb{Q}$ determinate de r.

Pe τ definim o adunare astfel: dacă $s, t \in \tau$, atunci $s + t = (I_{s+t}, II_{s+t})$, unde $I_{s+t} = \{a+b \mid a \in I_s$ şi $b \in I_t\}$ şi $II_{s+t} = \{A+B \mid A \in II_s$ şi $B \in II_t\}$.

Definim adunarea pe $\mathbb{R}$ prin: $\hat{s} + \hat{t} = \widehat{s+t}$,unde $s, t \in \tau$.

O tăietură în $\mathbb{Q}$ se numeşte pozitivă (negativă) atunci când în prima clasă (în a doua clasă) a sa se află un număr raţional pozitiv (negativ). Vom nota cu τ_+ mulţimea tăieturilor pozitive.

Un număr real se numeşte pozitiv (negativ) atunci când are ca reprezentant o tăietură pozitivă (negativă).

Definim pe $\mathbb{R}$ următoarea relaţie binară: pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, spunem că $\alpha < \beta$ dacă există $\gamma \in \mathbb{R}$, γ pozitiv, astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$. Relaţie binară pe $\mathbb{R}$ dată de: $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ se dovedeşte a fi o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{R}$.

Pe τ_+ definim o înmulţire astfel: dacă $s, t \in \tau_+$, atunci $s \cdot t = (I_{st}, II_{st})$, unde $I_{st} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in I_s,\ a > 0$ şi $b \in I_t, b > 0\}$ şi $II_{s+t} = \{AB \mid A \in II_s$ şi $B \in II_t\}$.

Definim înmulţirea pe $\mathbb{R}$ astfel:

$$\alpha \cdot \beta = \{ \begin{array}{cc} \hat{st}, & \alpha, \beta > 0 \\ -\alpha \cdot (-\beta), & \alpha > 0, \beta < 0 \\ -(-\alpha) \cdot \beta, & \alpha < 0, \beta > 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0, & \alpha = 0 \textbf{ sau } \beta = 0 \end{array} ,$$

unde $\alpha = \hat{s}$ şi $\beta = \hat{t}$, $s, t \in \tau$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, avem:

1. $\alpha < \beta$ dacă şi numai dacă $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

şi

2. pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, avem

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha y \leq \beta y.$$

Aplicaţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dată de $f(r) = \hat{r}$, pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, are proprietăţile:

$$f(r + r') = f(r) + f(r'),$$

$$f(rr') = f(r)f(r'),$$

$$r < r' \Rightarrow f(r) < f(r'),$$

pentru orice $r, r' \in \mathbb{Q}$. Prin urmare f este injectivă şi ca atare putem identifica $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) \in \mathbb{R}$, deci f este o scufundare a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$.

Orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ are margine superioară, i.e. relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă.

Bibliografie

1. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 24668

2. *Walter Rudin*, **Principles of Mathematical Analysis**, McGraw-Hill Book Company, 1964 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23777

COMPLEMENTE PRIVIND SISTEMUL NUMERELOR REALE

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale
$\mathbb{R}$ este un corp arhimedeean
Funcţia parte întreagă
Densitatea (în sensul relaţiei de ordine) lui $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$
Caracterizarea cu ε a marginilor unei mulţimi
Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor
$\mathbb{R}$ nu este cel mult numărabilă
Funcţiile modul, exponenţială, putere şi logaritmică.

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale

Vom prezenta definiţia "abstractă" a mulţimii numerelor reale, adică vom pune în evidenţă lista proprietăţilor definitorii ale lui $\mathbb{R}$.

Definiţie. *O mulţime nevidă $\mathbb{R}$ pe care sunt definite două operaţii interne, $+$ (adunarea) şi $\cdot$ (înmulţirea), precum şi o relaţie de ordine $\leq$, se numeşte o mulţime a numerelor reale dacă:*

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ;

b) $\leq$ este compatibilă cu structura de corp, i.e.

bi) pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \geq 0$ şi $a \leq b$, rezultă

$$a + x \leq b + x$$

şi

$$a \cdot y \leq b \cdot y;$$

bii) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$;

c) pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}$ care este nevidă şi mărginită superior, există $\sup A$.

Observaţie. *În condiţiile definiţiei de mai sus, relaţia de ordine este totală.*

În capitolul precend am construit un model pentru mulţimea numerelor reale (anume modelul lui Dedekind). Deoarece există şi alte modele pentru $\mathbb{R}$ (vezi [2], paginile 39-52, unde este prezentat modelul lui Cauchy, precum şi [1], paginile 32-35, precum şi modelul zecimal al lui Weierstarss, vezi [6], pagina 48), se pune problema unicităţii sistemului numerelor reale. Această problemă este rezolvată (vezi [2], paginile 86-88, precum şi [1], paginile 27–28) de următoarea

Teoremă. *Dacă* $(\mathbb{R}^{'}, +, \cdot, \leq)$ *şi* $(\mathbb{R}^{''}, +, \cdot, \leq)$ *satisfac condiţiile definiţiei de mai sus, atunci există* $f : \mathbb{R}^{'} \to \mathbb{R}^{''}$ *astfel încât:*

i)

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$*;*

ii)

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$*;*

i*ii)*

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$*;*

iv) pentru orice submulţime A *a lui* $\mathbb{R}^{'}$ *care este nevidă şi mărginită superior,* $f(A)$ *este nevidă şi mărginită superior şi*

$$\sup f(A) = f(\sup A).$$

Observaţie. *Prin urmare, din punct de vedere abstract, există o unică mulţime de numere reale. Orice obiect care se încadrează în definiţia de mai sus se va numi mulţimea numerelor reale şi se va nota cu* $\mathbb{R}$*.*

$\mathbb{R}$ este un corp arhimedeean

Următorul rezultat pune în evidenţă o proprietate esenţială a sistemului numerelor reale, anume aceea care afirmă că orice număr real strict pozitiv adunat cu el însuşi de un număr suficient de ori se va poziţiona la dreapta oricărui alt număr real.

Teoremă. *Pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, *există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$a < nb,$$

i.e. $\mathbb{R}$ *este un corp arhimedeean*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ astfel încât

$$nb \leq a,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci mulţimea $A = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ este nevidă şi majorată, deci există $z = \sup A$.

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem

$$mb + b = (m+1)b \leq z,$$

deci

$$mb \leq z - b,$$

de unde

$$z \leq z - b,$$

i.e. contradicţia

$$b \leq 0.$$

Observaţie. *Teorema anterioară arată că pentru orice număr real există un număr natural mai mare decât el. Prin urmare* $\mathbb{N}$ *este nemărginită superior.*

Exerciţii

1. Să se arate că pentru $a \in [0, \infty)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $a = 0$;

ii) $a \leq \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

iii) $a \leq \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$.

2. Să se arate că

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

Notă istorică. *Arhimede* (287-212 Î.C.) a fost unul dintre fondatorii metodei ştiinţifice; a fost numit "cel mai luminat cap al antichităţii". Arhimede a studiat, la Alexandria, cu succesorii lui Euclid. A fost prieten cu regele Hieron al doilea al Siracusei. Arhimede a inventat multe dispozitive folosite

în lupte, în special în războaiele de apărare duse de Siracusa împotriva romanilor conduşi de Marcellus. El a perfectat o metodă de integrare, care i-a permis să calculeze arii, volume şi suprafeţe. A obţinut o aproximare foarte bună a lui π. A descoperit celebrul principiu care descrie comportamentul unui corp scufundat într-un lichid. A fost omorât de către un soldat roman în timpul capturării Siracusei de către romani în al doilea război punic.

Funcţia parte întreagă

Pentru $b = 1$, obţinem, din teorema de mai sus, că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a < n.$$

Prin urmare mulţimea

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid a < m\}$$

este nevidă.

Deoarece $\mathbb{N}$ este bine ordonată, putem considera n_0 primul element al lui M.

Evident

$$n_0 \geq 2.$$

Atunci

$$n_0 - 1 \notin M,$$

căci altminteri, cum $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$, obţinem contradicţia

$$n_0 \leq n_0 - 1.$$

Deci

$$n_0 - 1 \leq a < n_0.$$

Prin urmare, cu notaţia $n_0 - 1 \overset{not}{=} n$, am arătat că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Lucrând cu $-a$ în loc de a, se deduce că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \leq -1$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Este evident că pentru $a \in (-1, 1)$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1,$$

anume $n = -1$, dacă $a \in (-1, 0)$ şi $n = 0$, dacă $a \in [0, 1)$.

Prin urmare, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Mai mult, n *este unic.*

Într-adevăr, dacă există $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, astfel încât $n \leq a < n + 1$ şi $m \leq a < m + 1$, atunci putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $n < m$ şi obţinem contradicţia $a < n + 1 \leq m \leq a$.

Am obţinut aşadar următoarea:

Teoremă (de existenţă a părţii întregi). *Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există un unic $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$n \leq a < n + 1.$$

Numărul n se numeşte partea întreagă a lui a şi se notează prin $[a]$.

Observaţie. *Este valabilă următoarea variantă (multiplicativă) a teoremei care afirmă proprietatea lui $\mathbb{R}$ de a fi corp arhimedeean (vezi [4], paginile 10-11).*

Teoremă. *Fie $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$. Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$b^n \leq a < b^{n+1}.$$

Exerciţiu. Pentru orice $a \in [0, 1)$ există un unic şir de cifre $r_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ astfel încât o infinitate dintre ele sunt diferite de 9 şi

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{10^k},$$

fapt care va fi marcat prin scrierea

$$a = 0, r_1 r_2 .....$$

Densitatea (în sensul relaţiei de ordine) lui $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Propoziţie.

i) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere raţionale.

ii) Suma dintre un număr raţional şi un număr iraţional este un număr iraţional.

iii) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere iraţionale.

Demonstraţie.

i) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Atunci $c = b - a > 0$, deci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 < nc.$$

Atunci

$$\frac{[na]+1}{n} - a \leq \frac{[na]+1}{n} - \frac{[na]}{n} = \frac{1}{n} < c,$$

de unde

$$\frac{[na]+1}{n} < b.$$

Cum

$$\frac{[na]}{n} \leq a < \frac{[na]+1}{n},$$

deducem că

$$a < \frac{[na]+1}{n} < b,$$

deci

$$\frac{[na]+1}{n} \in (a,b) \cap \mathbb{Q}.$$

Repetând acest raţionament cu a şi $\frac{[na]+1}{n}$ în loc de a şi b etc, se obţine concluzia.

ii) Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ astfel încât

$$c = a + b \in \mathbb{Q}.$$

Atunci obţinem contradicţia

$$c - a = b \in \mathbb{Q}.$$

iii) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $d \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Atunci, conform i), există o infinitate de numere raţionale r astfel încât

$$a - d < r < b - d,$$

deci

$$a < r + d < b,$$

de unde

$$r + d \in (a, b) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}).$$

Caracterizarea cu ε a marginilor unei mulţimi

Teoremă. *Fie A o mulţime nevidă majorată de numere reale şi $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:*

i) $\sup A = a$ *dacă şi numai dacă ($x \leq a$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$)*

ii) $\inf A = b$ *dacă şi numai dacă ($b \leq x$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x' \in A$ astfel încât $x' < b + \varepsilon$).*

Demonstraţie.

i) "$\Rightarrow$" Deoarece a este majorant al lui A, deducem că $x \leq a$, pentru orice $x \in A$. Deoarece $a - \varepsilon < a$, iar a este cel mai mic majorant al lui A, deducem că $a - \varepsilon$ nu este majorant al lui A, deci există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$.

"$\Leftarrow$" Deoarece $x \leq a$, pentru orice $x \in A$, deducem că a este majorant al lui A.

Presupunem, prin reducere la absurd, că există b majorant al lui A astfel încât

$$b < a.$$

Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 < n(a - b),$$

i.e.

$$\frac{1}{n} < a - b,$$

de unde

$$x \leq b < a - \frac{1}{n},$$

pentru orice $x \in A$, fapt care, în conformitate cu ipoteza, contrazice existenţa unui element $x^{'} \in A$ astfel încât

$$a - \frac{1}{n} < x^{'}.$$

Aşadar a este cel mai mic majorant al lui A.
Prin urmare

$$a = \sup A.$$

ii) Demonstraţie similară.

Exerciţii.

1. Să se determine marginile mulţimilor:

$$\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N},\, m < 2n\},$$

$$\{\frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{\frac{m}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Fie A şi B două submulţimi mărginite a lui $\mathbb{R}$.
Notăm

$$-A = \{-a \mid a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$$

şi

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Atunci:
i) $-A$ este mărginită şi

$$-\sup A = \inf(-A) \leq \sup(-A) = -\inf(A).$$

ii) $A + B$ este mărginită şi

$$\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

iii) dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, pentru orice $a \in A$ şi $b \in B$, atunci $A \cdot B$ este mărginită şi

$$\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Observaţie. Dacă A şi B nu sunt mulţimi care au toate elementele pozitive, egalitatea $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B)$ nu mai rămâne valabilă aşa cum arată exemplul:

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

şi

$$B = \{-1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

unde $\inf A = 0$, $\inf B = -2$ şi $\inf(A \cdot B) = -2$.

iv) dacă $A \subseteq B$ atunci

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B),$$

i.e. marginile unei submulţimi se situează între marginile mulţimii.

v) $A \cup B$ este mărginită şi

$$\inf\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat extrem de util, care în esenţă este echivalent cu ultima teoremă din secţiunea precedentă (vezi [2], pagina 24).

Teoremă (Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor). *Fie a_n,$b_n \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n < b_n$ şi*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Demonstraţie. Mulţimile $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ şi $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt minorate de a_1 şi majorate de b_1.

Prin urmare există

$$a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

şi

$$b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Deoarece

$$a_n \leq b_m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deducem că

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deci

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

de unde

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Exerciţiu. Să se arate că

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{2^n}) = \varnothing.$$

Remarcă. Exerciţiu de mai sus arată că nu putem renunţa, în teorema anterioară, la condiţia ca intervalele considerate să fie închise.

$\mathbb{R}$ **nu este cel mult numărabilă**

Rezultatul următor arată că, spre deosebire de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nu este în bijecţie cu $\mathbb{N}$.

Teoremă. $\mathbb{R}$ *nu este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\mathbb{R}$ este numărabilă.

Atunci există x_n, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n \neq x_m$, pentru orice $n \neq m$, şi

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

Fie a_1 şi b_1 astfel încât

$$x_1 \notin [a_1, b_1].$$

Împărţim intervalul $[a_1, b_1]$ în trei părţi egale.

Atunci cel puţin unul dintre aceste trei subintervale nu va conţine pe x_2.

Aşadar există a_2 şi b_2 astfel încât

$$[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$$

şi

$$x_2 \notin [a_2, b_2].$$

Repetând acest procedeu, găsim a_n şi b_n cu următoarele proprietăţi:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$$

şi

$$x_n \notin [a_n, b_n],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Atunci

$$x \neq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde obţinem contradicţia

$$x \notin \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \mathbb{R}.$$

Observaţie. *Mulţimea numerelor iraţionale (i.e. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) este infinită şi nu este numărabilă.*

Funcţia modul

Funcţia modul joacă un rol extrem de important în cadrul analizei matematice.

Propoziţie. *Funcţia $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de*

$$|x| = \max\{x, -x\} = \{ \begin{array}{cc} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} ,$$

se numeşte funcţie modul.

Pentru orice $x, y, a \in \mathbb{R}$, avem:

i)
$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

ii)
$$|xy| = |x|\,|y|$$

iii)
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

iv)
$$||x| - |y|| \leq |x - y|\,.$$

Funcţiile exponenţială şi logaritmică

În cele ce urmează vom introduce funcţiile exponenţială şi logaritmică.

Puterea de exponent natural a unui număr real

Definiţie. *Pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ definim x^n, inductiv, astfel:*

$$x^0 = 1$$

şi

$$x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

Proprietăţi. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ şi $n, m \in \mathbb{N}$, avem:*

1.
$$x^n = 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = 0;$$

2.
$$1^n = 1;$$

3.
$$(xy)^n = x^n y^n;$$

4. *dacă $x \neq 0$, atunci*
$$(\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n};$$

5.
$$0 < x < y \Rightarrow 0 < x^n < y^n;$$

6. *dacă* $n \geq 2$, *atunci*

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x$$

şi

$$x > 1 \Rightarrow x^n > x.$$

7.

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

şi

$$x^{n \cdot m} = (x^n)^m.$$

Puterea de exponent raţional a unui număr real pozitiv

Propoziţie. *Pentru orice* $x \in [0, \infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *există un unic* $a \in [0, \infty)$, *astfel ca*

$$a^n = x.$$

a se numeşte rădăcina aritmetică de ordin n *a lui* x *şi vom folosi notaţia*

$$a \overset{not}{=} x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Definiţie. *Pentru* $x \in (0, \infty)$ *şi* $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, *cu* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $q \in \mathbb{N}$, *elementul*

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p,$$

care nu depinde de fracţia $\frac{p}{q}$ *care reprezintă pe* r, *se numeşte puterea de exponent* r *a lui* x *şi se va nota cu* x^r.

Dacă $r \in \mathbb{Q}$ *şi* $r < 0$, *definim*

$$x^r \overset{def}{=} \frac{1}{x^{-r}} = (\frac{1}{x})^{-r}.$$

Puterea de exponent real a unui număr real pozitiv şi funcţia logaritmică

Propoziţie. *Pentru orice* $x \in (0,\infty)$, $x > 1$ *(respectiv* $x < 1$*) există o unică funcţie* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *astfel ca:*

i) f *este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).*

ii)

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

iii)

$$f(1) = x.$$

Observaţie. *Dacă* $a \in \mathbb{Q}$, *atunci* $f(a) = x^a$, *iar mai general, pentru* $a \in \mathbb{R}$, *avem*

$$f(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ şi } r < a\} = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ şi } r > a\},$$

pentru $x > 1$, *respectiv*

$$f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ şi } r < a\} = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ şi } r > a\},$$

pentru $x < 1$.

Observaţie. *Funcţia de mai sus este surjectivă.*

Observaţie. *Funcţia de mai sus se numeşte funcţia exponenţială de bază* x *şi se notează cu* $\exp_x$, *iar, pentru* $x \neq 1$, *inversa ei se numeşte funcţia logaritmică de bază* x *şi se notează cu* $\log_x$.

Pentru $x > 1$, *funcţia* $\log_x$ *este strict crescătoare, iar pentru* $x < 1$ *funcţia* $\log_x$ *este strict descrescătoare.*

Mai mult, avem:

$$\log_x(x) = 1$$

şi

$$\log_x(ab) = \log_x(a) + \log_x(b),$$

pentru orice $a, b \in (0,\infty)$.

Observaţie. *Pentru* $a \in \mathbb{R}$ *funcţia* $p : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, *dată de*

$$p(x) = \{ \begin{array}{cc} x^a, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{array},$$

se numeşte funcţia putere de exponent a.

Propoziţie. *Pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ şi orice $a \in \mathbb{R}$, avem*

$$(xy)^a = x^a y^a.$$

Observaţie. *Demonstraţiile afirmaţiilor de mai sus privind funcţiile exponenţială, putere şi logaritmică se pot găsi în [1].*

REZUMAT

O mulţime nevidă $\mathbb{R}$ pe care sunt definite două operaţii interne, $+$ (adunarea) şi $\cdot$ (înmulţirea), şi o relaţie de ordine $\leq$, se numeşte mulţime a numerelor reale dacă: i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ; ii) $\leq$ este compatibilă cu structura de corp, i.e. bi) pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \geq 0$ şi $a \leq b$, rezultă $a + x \leq b + x$ şi $a \cdot y \leq b \cdot y$; bii) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$; iii) pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}$ care este nevidă şi mărginită superior, există $\sup A$.

Dacă $(\mathbb{R}^{'}, +, \cdot, \leq)$ şi $(\mathbb{R}^{''}, +, \cdot, \leq)$ satisfac condiţiile definiţiei de mai sus, atunci există $f : \mathbb{R}^{'} \to \mathbb{R}^{''}$ astfel încât: i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$; ii) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$; iii) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$; iv) pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}^{'}$ care este nevidă şi mărginită superior, $f(A)$ este nevidă şi mărginită superior şi $\sup f(A) = f(\sup A)$.

$\mathbb{R}$ este un corp arhimedeean (i.e. pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < nb$).

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există un unic $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq a < n+1$. Numărul n se numeşte partea întreagă a lui a şi se notează prin $[a]$.

Între două numere reale diferite există o infinitate de numere raţionale.

Între două numere reale diferite există o infinitate de numere iraţionale.

Fie A o mulţime nevidă majorată de numere reale. Atunci: i) $\sup A = a$ dacă şi numai dacă ($x \leq a$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x^{'} \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x^{'}$). ii) $\inf A = b$ dacă şi

numai dacă ($b \leq x$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x^{'} \in A$ astfel încât $x^{'} < b + \varepsilon$).

(Principiul lui Cantor al intervalelor închise incluse). Fie a_n,$b_n \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n < b_n$, şi $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

$\mathbb{R}$ nu este cel mult numărabilă.

Funcţia $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $|x| = \max\{x, -x\} = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right.$, se numeşte funcţie modul.

Pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, există un unic $a \in [0, \infty)$, astfel ca $a^n = x$.

a se numeşte rădăcina aritmetică de ordin n a lui x şi vom folosi notaţia $a \overset{not}{=} x^{\frac{1}{n}} =^n \sqrt{x}$.

Pentru $x \in (0, \infty)$ şi $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, cu $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ şi $q \in \mathbb{N}$, **elementul** $(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$ **nu depinde de fracţia** $\frac{p}{q}$ **care reprezintă** r**. El se numeşte puterea de exponent** r **a lui** x **şi se va nota cu** x^r**. Dacă** $r \in \mathbb{Q}$ şi $r < 0$, **definim** $x^r \overset{def}{=} \frac{1}{x^{-r}} = (\frac{1}{x})^{-r}$.

Pentru orice $x \in (0, \infty)$, $x > 1$ (respectiv $x < 1$) există o unică funcţie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ astfel ca:

i) f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

ii) $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

iii) $f(1) = x$.

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $f(a) = x^a$, iar mai general, pentru $a \in \mathbb{R}$, avem $f(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r < a\} = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r > a\}$, pentru $x > 1$, respectiv $f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r < a\} = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r > a\}$, pentru $x < 1$. Funcţia de mai sus este surjectivă. Funcţia de mai sus se numeşte funcţia exponenţială de bază x şi se notează cu $\exp_x$ iar, pentru $x \neq 1$, inversa ei se numeşte funcţia logaritmică de bază x şi se notează cu $\log_x$.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ funcţia $p : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $p(x) = x^a$, pentru orice $x \in (0, \infty)$ se numeşte funcţia putere de exponent a.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000

4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39801

5. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme,** Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23776.

6. *O. Stănăşilă*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

MULŢIMEA $\overline{\mathbb{R}}$

Construcţia lui $\overline{\mathbb{R}}$
Relaţia de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$
Adunarea pe $\overline{\mathbb{R}}$
Scăderea pe $\overline{\mathbb{R}}$
Înmulţirea pe $\overline{\mathbb{R}}$
Împărţirea pe $\overline{\mathbb{R}}$
Operaţii adiţionale care nu au sens în $\overline{\mathbb{R}}$

În scopul considerării limitelor la infinit sau a limitelor infinite, vom introduce dreapta reală încheiată.

Construcţia lui $\overline{\mathbb{R}}$

Vom considera două elemente distincte care nu sunt elemente ale lui $\mathbb{R}$, elemente care vor fi notate cu $-\infty$ şi $+\infty$. De obicei vom scrie ∞ în loc de $+\infty$.

Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi numeşte dreapta reală încheiată sau sistemul extins al numerelor reale.

Relaţia de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$

Definiţie. *Relaţia binară pe $\overline{\mathbb{R}}$ definită astfel: $x \leq y$ dacă are loc una dintre următoarele situaţii:*
i) $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$;
ii) $x = -\infty$ şi $y \in \overline{\mathbb{R}}$;
iii) $y = \infty$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$,
este o relaţie de ordine totală care prelungeşte relaţia de ordine de pe $\mathbb{R}$.

Observaţie. *Orice submulţime nevidă a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are drept majorant pe ∞ şi drept minorant pe $-\infty$.*

Observaţie. $\min\overline{\mathbb{R}} = -\infty$ *şi* $\max\overline{\mathbb{R}} = \infty$.

Propoziţie. *Orice submulţime nevidă a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are margine inferioară şi margine superioară, deci relaţia de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$ este completă.*

Observaţie. *Mai precis, pentru o submulţime nevidă* A *a lui* $\overline{\mathbb{R}}$*, avem următoarele situaţii:*

i) dacă $\infty \in A$*, atunci* $\sup A = \infty$*;*

ii) dacă $\infty \notin A$*, atunci* $A - \{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$ *şi apar următoarele situaţii:*

iia) $A - \{-\infty\}$ *este majorată în* $\mathbb{R}$*, caz în care* $\sup A$*(în* $\overline{\mathbb{R}}$*)=* $\sup A$*(în* $\mathbb{R}$*);*

iib) $A - \{-\infty\}$ *nu este majorată în* $\mathbb{R}$*, caz în care* $\sup A = \infty$*.*

Adunarea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Adunarea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor adunări în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞:

1.

$$x + \infty = \infty + x = \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2.

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Observaţie. *Nu putem defini coerent operaţiile*

$$\infty + (-\infty)$$

şi

$$(-\infty) + \infty.$$

Motivele acestei imposibiltăţi vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de şiruri.

Scăderea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Scăderea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde prin adăugarea următoarelor scăderi în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞:

1.

$$x - \infty = -\infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

2.

$$\infty - x = \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Observaţie. *Nu putem defini coerent operaţiile*

$$\infty - \infty$$

şi

$$(-\infty) - (-\infty).$$

Motivele acestei imposibiltăţi vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de şiruri.

Înmulţirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Înmulţirea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor înmulţiri în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞:

1.

$$x \cdot (+\infty) = \infty \cdot x = \infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$.

2.

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$.

3.

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$.

4.

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$.

Observaţie. *Nu putem defini coerent operaţiile*

$$\infty \cdot 0,$$

$$0 \cdot \infty,$$

$$(-\infty) \cdot 0$$

şi

$$0 \cdot (-\infty).$$

Motivele acestei imposibiltăţi vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de şiruri.

Împărţirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Împărţirea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde prin adăugarea următoarelor împărţiri în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞:

1.
$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\frac{\infty}{x} = \infty,$$
pentru orice $x \in (0, \infty)$.

3.
$$\frac{\infty}{x} = -\infty,$$
pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

4.
$$\frac{-\infty}{x} = -\infty,$$
pentru orice $x \in (0, \infty)$.

5.
$$\frac{-\infty}{x} = \infty,$$
pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

Observaţie. *Nu putem defini coerent operaţiile*
$$\frac{\infty}{\infty},$$
$$\frac{-\infty}{-\infty},$$
$$\frac{-\infty}{\infty}$$
şi
$$\frac{\infty}{-\infty}.$$

Motivele acestei imposibiltăţi vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de şiruri.

Alte operaţii care nu au sens în $\overline{\mathbb{R}}$

Nu putem defini coerent nici următoarele operaţii:

$$\infty^0$$

$$1^{\infty},$$

$$1^{-\infty},$$

$$0^0$$

şi

$$\frac{0}{0}.$$

Motivele acestei imposibiltăţi vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de şiruri.

REZUMAT

Vom considera două elemente distincte care nu sunt elemente ale lui $\mathbb{R}$, elemente care vor fi notate cu $-\infty$ şi $+\infty$. De obicei vom scrie ∞ în loc de $+\infty$. Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi numeşte dreapta reală încheiată sau sistemul extins al numerelor reale.

Relaţia binară pe $\overline{\mathbb{R}}$ definită astfel: $x \leq y$ dacă are loc una dintre următoarele situaţii: i) $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$; ii) $x = -\infty$ şi $y \in \overline{\mathbb{R}}$; iii) $y = \infty$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, este o relaţie de ordine totală care prelungeşte relaţia de ordine de pe $\mathbb{R}$.

Orice submulţime nevidă a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are margine inferioară şi margine superioară, deci relaţia de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$ este completă.

Adunarea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor adunări în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞: 1. $x + \infty = \infty + x = \infty$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; 2. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Scăderea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde prin adăugarea următoarelor scăderi în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞: 1.$x-\infty=-\infty$**, pentru orice** $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$**; 2.** $\infty - x = \infty$**, pentru orice** $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$**.**

Înmulţirea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor înmulţiri în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞: 1. $x\cdot(+\infty) = \infty\cdot x = \infty$**, pentru orice** $x \in (0,\infty)\cup\{\infty\}$**; 2.** $x\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot x = -\infty$**, pentru orice** $x \in (-\infty,0)\cup\{-\infty\}$**; 3.** $x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = -\infty$**, pentru orice** $x \in (0,\infty) \cup \{\infty\}$**; 4.** $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$**, pentru orice** $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$**.**

Împărţirea pe $\mathbb{R}$ se poate extinde prin adăugarea următoarelor împărţiri în care intervin elementele $-\infty$ şi ∞: 1. $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$**, pentru orice** $x \in \mathbb{R}$**; 2.** $\frac{\infty}{x} = \infty$**, pentru orice** $x \in (0,\infty)$**; 3.** $\frac{\infty}{x} = -\infty$**, pentru orice** $x \in (-\infty, 0)$**; 4.** $\frac{-\infty}{x} = -\infty$**, pentru orice** $x \in (0,\infty)$**; 5.** $\frac{-\infty}{x} = \infty$**, pentru orice** $x \in (-\infty, 0)$**.**

Nu putem defini coerent nici următoarele operaţii: ∞^0**,** 1^∞**,** $1^{-\infty}$**,** 0^0 **şi** $\frac{0}{0}$**.**

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

2. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39801

$\mathbb{R}^n$

Deoarece evoluţia multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulţi parametri, ele sunt modelate prin intermediul funcţiilor de mai multe variabile, adică a funcţiilor care au drept domeniu o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$. Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăţilor mulţimii $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$
Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$
Norma unui vector din $\mathbb{R}^n$
Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz
Bila deschisă, bila închisă şi sfera din $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$

Dacă X_1, X_2,..., X_n sunt mulţimi nevide, atunci produsul lor cartezian, $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ constă în toate perechile ordonate $(x_1, x_2, ..., x_n)$, cu $x_i \in X_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ...n\}$.

În cazul în care toate mulţimile X_i sunt identice, adică $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, vom nota produsul cartezian

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \overset{not}{=} X^n.$$

Vom lucra în cele ce urmează cu $\mathbb{R}^n$.

Observaţie. *Aşa cum uneori ne referim la $\mathbb{R}^1$ ca fiind dreapta reală, la fel vom numi uneori $\mathbb{R}^2$ planul real sau $\mathbb{R}^3$ spaţiul real.*

Observaţie. *Pentru simplificarea scrierii, vom nota*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

iar $x_1, x_2, ..., x_n$ se vor numi prima componentă, a doua componentă, ..., a n-a componentă a lui x.

x va fi numit vector sau punct din $\mathbb{R}^n$.

Elementul

$$0 = (0, 0, ..., 0)$$

se numeşte originea sau vectorul zero al lui $\mathbb{R}^n$.

Vom introduce două operaţii algebrice pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţie. *Dacă* $c \in \mathbb{R}$ *şi* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *atunci definim* $c \cdot x$ *(notat pe scurt cu* cx*), numit produsul numărului real* c *cu vectorul* x, *astfel*

$$c \cdot x = (cx_1, cx_2, ..., cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *atunci definim* $x+y$, *numit suma vectorilor* x *şi* y, *prin*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Teoremă. *Fie* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *şi* $b, c \in \mathbb{R}$. *Atunci avem:*

A 1.

$$x + y = y + x.$$

A 2.

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A 3.

$$0 + x = x + 0.$$

A 4.

$$x + (-1)x = (-1)x + x = 0.$$

I 1

$$1x = x.$$

I 2.

$$b(cx) = (bc)x.$$

D

$$c(x + y) = cx + cy$$

şi

$$(b + c)x = bx + cx.$$

Observaţie. *Prin urmare,* $\mathbb{R}^n$, *cu cele două operaţii descrise mai sus, este spaţiu vectorial peste* $\mathbb{R}$.

Observaţie. *Vom folosi următoarele notaţii*

$$(-1)x \stackrel{not}{=} -x$$

şi

$$x + (-y) \stackrel{not}{=} x - y.$$

Observaţie. *Sistemul* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, *unde* $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$, *formează o bază a spaţiului vectorial real* $\mathbb{R}^n$, *orice vector* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *putând fi scris sub forma*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ şi norma unui vector din $\mathbb{R}^n$

Definiţie. *Pentru* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *şi* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *definim* $x \cdot y$ *(notat pe scurt* xy*), numit produsul scalar al vectorilor* x *şi* y*, prin*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

şi norma lui x*, notată* $\|x\|$*, prin*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Iată principalele proprietăţi ale produsului scalar.

Propoziţie. *Pentru* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *şi* $c \in \mathbb{R}$ *avem:*
i)

$$x \cdot x \geq 0.$$

ii)

$$x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

iii)

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

iv)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

şi
$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z.$$
v)
$$(cx)\cdot y = c(x\cdot y) = x\cdot(cy).$$

Vom prezenta acum principalele proprietăţi ale normei (sau lungimii) unui vector.

Propoziţie (Proprietăţile Normei). *Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $c \in \mathbb{R}$. Atunci:*
i)
$$\|x\| \geq 0.$$
ii)
$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$
iii)
$$\|cx\| = |c|\,\|x\|\,.$$
iv)
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \left\| x \overset{+}{-} y \right\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Observaţie. *Numărul real $\|x\|$ poate fi gândit ca fiind lungimea lui x sau ca fiind distanţa de la 0 la x.*

Mai general, $\|x-y\|$ poate fi interpretată ca distanţa de la x la y.

Astfel

i) spune că distanţa de la x la y este un număr real pozitiv care este 0 dacă şi numai dacă $x = y$,

iii), pentru $c = -1$, arată că
$$\|x-y\| = \|y-x\|\,,$$
adică distanţa de la x la y este egală cu distanţa de la y la x,

iar iv) implică inegalitatea
$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$$
care este cunoscută sub numele de inegalitatea triunghiului.

Propoziţie (Identitatea Paralelogramului). *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *atunci*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Observaţie. *Numele de Identitatea Paralelogramului este justificat de următoarea interpretare geometrică: în paralelogramul cu vîrfurile* 0, x, $x+y$ *şi* y *suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor. Importanţa identităţii paralelogramului rezidă în faptul că satisfacerea ei pentru orice doi vectori caracterizează normele care provin dintr-un produs scalar (vezi [1], pagina 27).*

Prezentăm acum un rezultat care arată relaţiile dintre lungimea unui vector şi valorile absolute ale componentelor sale.

Propoziţie. *Pentru* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *avem*

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}.$$

Observaţie. *Inegalitatea de mai sus arată că dacă lungimea lui* x *este mică, atunci lungimile componentelor lui* x *sunt mici şi reciproc.*

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Vom prezenta acum un rezultat foarte util (vezi spre exemplu demonstraţia faptului că orice aplicaţie liniară având domeniul $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul $\mathbb{R}^q$ este continuă, precum şi Lema de aproximare folosită în demonstraţiile teoremelor de injectivitate şi surjectivitate locală) care a fost demonstrat de către Cauchy.

Deoarece Buniakovski şi Schwarz au dat generalizări utile ale acestui rezultat, el se numeşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Notă istorică. Matematicianul francez *Augustin-Louis Cauchy* (1789 - 1857) a fost fondatorul Analizei Matematice moderne. Laplace şi Lagrange au fost prieteni ai familiei Cauchy. La sfatul lui Lagrange, tatăl lui Cauchy a decis că înainte de a începe un studiu serios al matematicii, fiul său are nevoie de un studiu temeinic al limbilor clasice. Astfel, începând cu 1802, Cauchy studiază, timp de doi ani, limbile clasice la École Centrale du Panthéon, iar

din 1805 până în 1807 este student la École Polytechnique, pentru ca apoi să urmeze cursurile de la École des Ponts et Chaussées. În 1810 primeşte prima slujbă la Cherbourg unde contribuie la realizarea infrastructurii portuare necesare războaielor purtate de către Napoleon. Cauchy era un catolic fervent, fapt care i-a cauzat unele neplăceri. După încercări nereuşite de a obţine o poziţie academică la École des Ponts et Chaussées, Bureau des Longitudes şi École Polytechnique, fiind preferaţi în defavoarea sa Legendre, Poinsot, Molard şi Binet, reuşeşte să obţină, în 1815, un post la École Polytechnique, iar ulterior, în 1817, un post la Collège de France.Cursul său, intitulat Cours d'analyse, apărut în 1821, prezintă teoremele de bază ale analizei matematice într-un mod foarte riguros. Cartea Leçons sur le Calcul Différentiel poate fi considerată ca primul curs riguros de analiză complexă. În 1816 primeşte marele premiu al Academiei Franceze de Ştiinţe pentru o lucrare asupra undelor şi devine membru al Academiei de Ştiinţe. Relaţiile lui Cauchy cu ceilalţi membri ai comunităţii ştiinţifice nu au fost prea bune, fiind celebre în epocă opiniile deloc măgulitoare la adresa sa ale lui Poncelet şi Abel. Din cauza conjucturii politice, în 1830, Cauchy petrece o scurtă perioadă în Elveţia. Deoarece nu este de acord să depună jurământul de credinţă faţă de noul regim instalat la Paris, îşi pierde toate poziţiile deţinute în Franţa. În 1831 pleacă la Torino unde acceptă oferta regelui Piemontului de a ocupa o catedră de fizică teoretică. În 1833 pleacă la Praga pentru a-l însoţi în exil pe regele Charles al zecelea, unde se întâlneşte cu Bolzano. Se înapoiază la Paris, în 1838, unde îşi reocupă locul la Academie. În 1848 îşi recapătă şi poziţiile universitare. A fost unul dintre cei mai prolifici matematicieni, publicând 789 de articole. Multe noţiuni de analiză matematice, analiză complexă, ecuaţii diferenţiale, fizică matematică şi mecanică teoretică sunt legate de numele său.

Notă istorică. *Victor Buniakovski* (1804-1889) a fost profesor la St. Petersburg.

Notă istorică. *Hermann Amandus Schwarz* (1843-1921) a fost studentul şi succesorul lui Weierstrass la Berlin. A avut numeroase contribuţii matematice, în special în cadrul analizei complexe.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci*

$$x \cdot y \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Mai mult, dacă x şi y nu sunt zero, atunci avem egalitate dacă şi numai dacă există un număr real strict pozitiv c astfel ca

$$x = cy.$$

Demonstraţie. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $z = ax - by$, atunci

$$z \cdot z \geq 0,$$

de unde, folosind proprietăţile precedente, avem

$$0 \leq a^2 x \cdot x - 2ab x \cdot y + b^2 y \cdot y.$$

Alegem $a = \|y\|$ şi $b = \|x\|$.

Prin urmare avem

$$0 \leq \|y\|^2 \|x\|^2 - 2\|y\|\|x\|(x \cdot y) + \|x\|^2 \|y\|^2 =$$

$$= 2\|x\|\|y\|(\|x\|\|y\| - (x \cdot y)),$$

de unde

$$x \cdot y \leq \|x\|\|y\|.$$

Dacă $x = cy$, cu $c > 0$, atunci

$$\|x\| = c\|y\|,$$

deci

$$x \cdot y = (c)y \cdot y = c(y \cdot y) = c\|y\|^2 = (c\|y\|)\|y\| = \|x\|\|y\|.$$

Reciproc, dacă $x \cdot y = \|x\|\|y\|$, atunci pentru $a = \|y\|$ şi $b = \|x\|$, elementul $z = ax - by$ are proprietatea că

$$z \cdot z = 0,$$

de unde $z = 0$, adică

$$\|y\| x = \|x\| y.$$

Prin urmare

$$x = cy,$$

unde $c = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (căci $\|y\| \neq 0$).

Corolar. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *atunci*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Mai mult, dacă x *şi* y *nu sunt zero, atunci avem egalitate dacă şi numai dacă există un număr real* c *astfel ca*

$$x = cy.$$

Observaţie. *Dacă* $\|x\| = \|y\| = 1$, *atunci* $|x \cdot y| \leq 1$, *iar în acest caz* $x \cdot y$ *poate fi intepretat geometric ca fiind cosinusul unghiului dintre* x *şi* y. *În* $\mathbb{R}^2$ *sau* $\mathbb{R}^3$, *unde se poate defini unghiul* φ *dintre* x *şi* y, *se arată că* $x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cos\varphi$; *această formulă este folosită adesea pentru a defini produsul scalar* $x \cdot y$. *În prezenţa unui produs scalar geometria spaţiului este mult mai bogată deoarece se poate defini noţiunea de unghi dintre doi vectori.*

Fenomenele descrise mai sus permit trecerea la un nivel nou de abstractizare prin degajarea următoarelor definiţii:

Definiţie. *Dat un spaţiu vectorial real* V, *o funcţie* $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ *care satisface următoarele proprietăţi:*

1)

$$< \alpha x + \beta y, z >=< \alpha x, z > + < \beta y, z > \, ,$$

pentru orice $x, y, z \in V$ *şi orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2)

$$< x, y >=< y, x > \, ,$$

pentru orice $x, y \in V$;

3)

$$< x, x > \geq 0,$$

pentru orice $x \in V$;

4) pentru orice $x \in V$,

$$< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

se numeşte produs scalar pe V.

Definiţie. *Dat un spaţiu vectorial real* V, *o funcţie* $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ *care satisface următoarele proprietăţi:*

1)
$$\|x\| \geq 0,$$
pentru orice $x \in V$;

2) pentru orice $x \in V$,
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
3)
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \,,$$
pentru orice $x \in V$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$;

4) pentru orice $x, y \in V$, avem
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,,$$
se numeşte normă pe V.

Perechea $(V, \|.\|)$ se numeşte normă pe V.

Exerciţii

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată de
$$f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \,,$$
pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată de
$$f(x) = \|x\|_\infty = \sup\{|x_1| \,, |x_2| \,, ..., |x_n|\},$$
pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

Observaţie. Mai general, pentru $p \in [1, \infty]$, funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată de
$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } p \in [1, \infty) \\ \sup\{|x_1| \,, |x_2| \,, ..., |x_n|\}, & \text{dacă } p = \infty \end{array} ,$$
pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care satisface identitatea paralelogramului dacă şi numai dacă $p = 2$.

3. Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel ca

$$a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1 ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel ca

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1 ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Observaţie. Ultimele două exerciţii exemplifică un fenomen mult mai general, anume faptul că pentru orice două norme $\|.\|_1$ şi $\|.\|_2$ pe $\mathbb{R}^n$ există $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ astfel încât

$$\|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Este adevărat că

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$$

şi

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty ,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$?

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

dacă şi numai dacă există $c \geq 0$ astfel ca $x = cy$ sau $y = cx$?

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că

$$\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

dacă şi numai dacă există $c \geq 0$ astfel ca $x = cy$ sau $y = cx$?

8. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dacă şi numai dacă $x \cdot y = 0$.

În acest caz spunem că x şi y sunt ortogonali sau perpendiculari.

Bila deschisă, bila închisă şi sfera din $\mathbb{R}^n$

Definiţie. *Fie* $x \in \mathbb{R}^n$ *şi* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Atunci mulţimea

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$

se numeşte bila deschisă cu centrul x *şi raza* r *(din* $\mathbb{R}^n$*) şi se notează cu* $B(x, r)$*, mulţimea*

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$$

se numeşte bila închisă cu centrul x *şi raza* r *(din* $\mathbb{R}^n$*) şi se notează cu* $B[x, r]$*, iar mulţimea*

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}$$

se numeşte sfera cu centrul x *şi raza* r *(din* $\mathbb{R}^n$*) şi se notează cu* $S(x, r)$.

Exerciţiu. Descrieţi mulţimile

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 < 1\},$$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$$

şi

$$B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty < 1\}.$$

REZUMAT

Dacă $c \in \mathbb{R}$ **şi** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$**, atunci definim** $c \cdot x$ **(notat pe scurt cu** cx**), numit produsul numărului real** c **cu vectorul** x**, astfel** $c \cdot x = (cx_1, cx_2, ..., cx_n) \in \mathbb{R}^n$**.**

Dacă $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$**, atunci definim** $x + y$**, numit suma vectorilor** x **şi** y**, prin** $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$**, cu operaţiile descrise mai sus, este spaţiu vectorial peste** $\mathbb{R}$.

Sistemul $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$**, unde** $e_1 = (1, 0, ..., 0)$**,** $e_2 = (0, 1, ..., 0)$**, ...,** $e_n = (0, ..., 0, 1)$**, formează o bază a spaţiului vectorial real** $\mathbb{R}^n$**, orice vector** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ **putând fi scris sub forma** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$.

Pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ **şi** $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, **definim** $x \cdot y$ **(notat pe scurt** xy**), numit produsul scalar al vectorilor** x **şi** y**,**

prin $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ **şi norma lui** x**, notată** $\|x\|$**, prin** $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$**.**

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$**, atunci** $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$. **Mai mult, dacă** x **şi** y **nu sunt zero, atunci avem egalitate dacă şi numai dacă există un număr real** c **astfel ca** $x = cy$.

Proprietăţile Normei. **Fie** $x, y \in \mathbb{R}^n$ **şi** $c \in \mathbb{R}$. **Atunci: i)** $\|x\| \geq 0$**; ii)** $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$**; iii)** $\|cx\| = |c| \|x\|$**; iv)** $|\|x\| - \|y\|| \leq \left\| x \overset{+}{-} y \right\| \leq \|x\| + \|y\|$**.**

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ **şi** $r \in \mathbb{R}$**,** $r > 0$**. Atunci mulţimea** $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ **se numeşte bila deschisă cu centrul** x **şi raza** r **(din** $\mathbb{R}^n$**), mulţimea** $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$ **se numeşte bila închisă cu centrul** x **şi raza** r **(din** $\mathbb{R}^n$**), iar mulţimea** $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}$ **se numeşte sfera cu centrul** x **şi raza** r **(din** $\mathbb{R}^n$**).**

Pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$**, avem** $|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$**.**

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică II,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1998 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

ELEMENTE DE TOPOLOGIE

NOŢIUNI ELEMENTARE DE TOPOLOGIE PE $\mathbb{R}^n$ ŞI $\overline{\mathbb{R}}$

Mulţime deschisă şi mulţime închisă
Vecinătate a unui punct
Punct interior al unei mulţimi
Punct de acumulare al unei mulţimi
Teorema intervalelor nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$
Teorema Bolzano-Weierstrass
Teorema de structură a mulţimilor deschise
Marginile unei mulţimi mărginite de numere reale sunt puncte aderente ale mulţimii
Definiţia spaţiului topologic
Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

La mijlocul secolului al XIX-lea a început o dezvoltare cu totul nouă a geometriei, care curând a devenit una dintre marile forţe ale matematicii moderne. Noul subiect, denumit topologie sau analysis situs, are ca obiect studiul proprietăţilor figurilor geometrice care persistă, chiar dacă figurile sunt supuse unor transformări care distrug toate proprietăţile lor metrice şi proiective. ... Când Bernhard Riemann a venit la Göttingen ca student, atmosfera matematică a acestui orăşel universitar era plină de interes pentru aceste noi şi ciudate idei geometrice. Curând el şi-a dat seama că în aceste idei se află cheia înţelegerii celor mai profunde proprietăţi ale funcţiilor analitice de o variabilă complexă. Poate că nimic nu a dat un impuls mai puternic dezvoltării ulterioare a topologiei decât marea construcţie a teoriei lui Riemann a funcţiilor, în care noţiunile topologice sunt absolut fundamentale. (Ce este matematica?, de R. Courant şi H. Robbins, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pagina 252).

Multe dintre rezultatele importante ale analizei se bazează pe noţiuni şi rezultate de topologie.

Vom introduce conceptele de bază ale topologiei şi vom prezenta câteva dintre proprietăţile topologice cruciale ale lui $\mathbb{R}^n$.

Mulţime deschisă şi mulţime închisă

Definiţie. *O submulţime D a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte deschisă în $\mathbb{R}^n$ (sau simplu deschisă) dacă pentru orice punct x din D există un număr real strict pozitiv r astfel ca bila deschisă cu centrul x şi raza r să fie conţinută în D.*

Observaţie. *Altfel spus, mulţimea D din $\mathbb{R}^n$ este deschisă dacă orice punct al său este centrul unei bile deschise conţinută în D.*

Exemple-Exerciţii

1. $\mathbb{R}^n$ este deschisă.

2. $(0,1)$ este deschisă în $\mathbb{R}$, dar $[0,1]$ nu este deschisă în $\mathbb{R}$.

3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ şi $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1\}$ sunt deschise în $\mathbb{R}^2$, dar $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,1)$ şi $y=0\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$ (a se compara cu 2).

5. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,1)\}$ este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

6. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1)\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

7. Orice bilă deschisă din $\mathbb{R}^n$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Propoziţie (Proprietăţile mulţimilor deschise)

i) $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt deschise (în $\mathbb{R}^n$).

ii) Intersecţia oricăror două mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

iii) Reuniunea unei familii arbitrare de mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

Observaţie. *Intersecţia unei familii finite de mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.*

Intersecţia unei familii infinite de mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ nu este, în general, o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$, aşa cum arată următorul exemplu:

$$D_n = (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$$

este o mulţime deschisă, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, dar

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = [0,1],$$

iar $[0,1]$ nu este mulţime deschisă.

Definiţie. *O submulţime F a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte închisă în $\mathbb{R}^n$ (sau simplu, închisă) dacă $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$.*

Exemple-Exerciţii.

1. $\mathbb{R}^n$ este închisă.

2. $[0,1]$ şi $\{x \in \mathbb{R} \,|0\leq x\}$ sunt închise în $\mathbb{R}$.

3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este închisă în $\mathbb{R}^2$.

4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ este închisă în $\mathbb{R}^2$.

5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ este închisă în $\mathbb{R}^3$.

6. Orice bilă închisă din $\mathbb{R}^n$ este închisă în $\mathbb{R}^n$.

Propoziţie (Proprietăţile mulţimilor închise)

i) $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt închise (în $\mathbb{R}^n$).

ii) Reuniunea oricăror două mulţimi închise din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime închisă din $\mathbb{R}^n$.

iii) Intersecţia unei familii arbitrare de mulţimi închise din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime închisă din $\mathbb{R}^n$.

Observaţie. *Deşi în vorbirea curenta, ca de exemplu atunci cind ne referim la o uşă sau o fereastră, cuvintele deschis şi închis sunt antonime, nu acelaşi lucru este valabil în contextul de mai sus.*

Spre exemplu $\mathbb{R}^n$ şi $\emptyset$ sunt mulţimi deschise şi închise (în $\mathbb{R}^n$), iar $[0,1)$ nu este nici deschisă nici închisă (în $\mathbb{R}$).

Vecinătate a unui punct

Vom introduce acum o altă noţiune topologică care ne va fi utilă ulterior şi care permite caracterizarea mulţimilor deschise şi închise în alt mod.

Definiţie. *Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, atunci orice mulţime care conţine o mulţime deschisă (în $\mathbb{R}^n$) ce conţine x se numeşte vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x. Mulţimea vecinătăţilor lui x se notează cu $\mathcal{V}_x$.*

Punct interior al unei mulţimi

Definiţie. *Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct interior al mulţimii A dacă aceasta este o vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x.*

Punct de acumulare al unei mulţimi

Definiţie. *Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă orice vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x conţine cel puţin un punct al lui A diferit de x.*

Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se notează cu A'.

Exerciţii

1. O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ este vecinătate a lui $x \in \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă există o bilă deschisă din $\mathbb{R}^n$, cu centrul în x, conţinută în V.

2. Un element $x \in \mathbb{R}^n$ este punct interior al mulţimii A dacă şi numai dacă există o bilă deschisă din $\mathbb{R}^n$, cu centrul în x, conţinută în A.

3. Un element $x \in \mathbb{R}^p$ este punct de acumulare al mulţimii A dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in A$ astfel ca $0 < \|x - x_n\| < \frac{1}{n}$.

4. Orice punct din $[0,1]$ este punct de acumulare al lui $[0,1]$. Orice punct din $(0,1)$ este punct interior al lui $[0,1]$, dar 0 şi 1 nu sunt puncte interioare ale lui $[0,1]$.

5. Orice punct al lui $(0,1)$ este punct de acumulare şi punct interior al lui $(0,1)$. Totuşi, 0 şi 1 sunt de asemenea puncte de acumulare ale lui $(0,1)$, deci *un punct de acumulare al unei mulţimi nu aparţine neapărat mulţimii respective.*

6. Să se determine punctele de acumulare şi cele interioare pentru $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

7. O submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ nu are puncte de acumulare şi nici puncte interioare.

Teoremă (de caracterizare a mulţimilor deschise în termeni de puncte interioare şi în termeni de vecinătăţi). *Pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) A este deschisă (în $\mathbb{R}^n$).

ii) Orice punct al lui A este un punct interior al lui A.

iii) A este vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) pentru orice punct al său.

Următorul rezultat este extrem de util (vezi demonstraţia teoremei Heine-Borel, teoremei de permanenţă a compacităţii pentru funcţii continue etc).

Teoremă (de caracterizare a mulţimilor închise în termeni de puncte de acumulare). *O submulţime F a lui $\mathbb{R}^n$ este închisă (în $\mathbb{R}^n$) dacă şi numai dacă F conţine orice punct de acumulare al său.*

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Fie x un punct de acumulare al lui F.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x \notin F$.

Atunci $x \in \mathbb{R}^n - F$, şi cum $\mathbb{R}^n - F$ este mulţime deschisă, deducem că $\mathbb{R}^n - F$ este o vecinătate a lui x.

Cum x este un punct de acumulare al lui F, $\mathbb{R}^n - F$ conţine cel puţin un punct din F.

Această contradicţie încheie demonstraţia acestei implicaţii.

"$\Leftarrow$" Vom arăta că $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă.

Dacă $y \in \mathbb{R}^n - F$, atunci y nu este un punct de acumulare al lui F, deci există o vecinătate V a lui y care nu conţine puncte din F, i.e. $V \subseteq \mathbb{R}^n - F$, adică $\mathbb{R}^n - F$ este o vecinătate a lui y.

Prin urmare, cum y a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}^n - F$, deducem că $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă.

Teorema intervalelor nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$

Reamintim că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \leq b$, intervalul deschis din $\mathbb{R}$, notat cu (a, b), este mulţimea deschisă

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Similar, intervalul închis din $\mathbb{R}$, notat cu $[a, b]$, este mulţimea închisă

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Produsul cartezian a două intervale se numeşte dreptunghi, iar produsul cartezian a trei intervale se numeşte paralelipiped. Pentru simplitate, vom folosi termenul de interval (din $\mathbb{R}^n$), indiferent de n, mai precis vom adopta următoarea:

Definiţie. *Un interval deschis J, din $\mathbb{R}^n$, este produsul a n intervale deschise din $\mathbb{R}$.*

Observaţie. *Prin urmare, dat un interval deschis J, din $\mathbb{R}^n$, există a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ..., $a_n < b_n$, astfel ca*

$$J = \{x = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < \zeta_i < b_i, \textit{ pentru orice } i \in \{1, 2, ...n\}\}.$$

Similar, avem:

Definiţie. *Un interval închis I, din $\mathbb{R}^n$, este produsul a n intervale închise din $\mathbb{R}$.*

Observaţie. *Prin urmare, pentru un interval închis I, din $\mathbb{R}^n$, există a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, ..., $a_n \leq b_n$, astfel ca*

$$I = \{x = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq \zeta_i \leq b_i, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, ...n\}\}.$$

Definiţie. *O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există un interval în care este conţinută.*

Exerciţii

1. Un interval deschis din $\mathbb{R}^n$ este mulţime deschisă.

2. Un interval închis din $\mathbb{R}^n$ este mulţime închisă.

3. O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este mărginită dacă şi numai dacă există o bilă în care este conţinută.

Aşa cum am văzut, proprietatea crucială a sistemului numerelor reale, echivalentă cu faptul că relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă, este faptul că pentru orice şir de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}$, există un element, din $\mathbb{R}$, care se află în fiecare interval. Această proprietate este valabilă într-un cadru mai general (anume în $\mathbb{R}^n$). Mai precis este valabilă următoarea:

Teoremă (a intervalelor nevide închise incluse). *Fie $(I_m)_{m \geq 1}$ un şir de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$, deci, astfel ca*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_m \supseteq I_{m+1} \supseteq ....$$

Atunci există un element din $\mathbb{R}^n$ care se află în fiecare interval.

Teorema Bolzano-Weierstrass

Următorul rezultat este extrem de important pentru ceea ce urmează a fi prezentat în continuare.

Teorema Bolzano - Weierstrass. *Orice submulţime mărginită şi infinită a lui $\mathbb{R}^n$ are (cel puţin) un punct de acumulare.*

Demonstraţie. Fie B o submulţime mărginită şi infinită a lui $\mathbb{R}^n$.

Să considerăm I_1 un interval închis astfel ca

$$B \subseteq I_1.$$

Prin înjumătăţirea "laturilor" lui I_1 se obţin 2^n intervale închise incluse în I_1.

Deoarece B este infinită, cel puţin unul dintre cele 2^n intervale închise incluse în I_1 va conţine o infinitate de elemente din B.

Fie I_2 un astfel de interval închis inclus în I_1.

Se repetă procedeul de mai sus şi se obţine un şir $I_1, I_2, ..., I_k, ...$ de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$.

Conform rezultatului precedent există $\eta \in \mathbb{R}^n$ astfel ca

$$\eta \in I_k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că η este punct de acumulare al lui B, ceea ce va încheia demonstraţia.

Să observăm pentru început că

$$0 < l(I_k) \overset{def}{=} \max\{b_1^k - a_1^k, ..., b_n^k - a_n^k\} = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1),$$

unde

$$I_k = [a_1^k, b_1^k] \times ...[a_n^k, b_n^k],$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui η.

Atunci există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca

$$z \in \mathbb{R}^n, \ \|z - \eta\| < r \Rightarrow z \in V.$$

Alegem k, suficient de mare, astfel încât să avem

$$I_k \subseteq V.$$

Alegerea unui astfel de k este posibilă deoarece pentru η şi w din I_k, avem

$$\|\eta - w\| \leq \sqrt{n} l(I_k) = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} l(I_1),$$

şi există k, suficient de mare, astfel încât să avem

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}}l(I_1) < r.$$

Pentru un astfel de k avem

$$I_k \subseteq V.$$

Deoarece I_k conţine o infinitate de elemente din B, deducem că V conţine cel puţin un element al lui B diferit de η.

Prin urmare η este punct de acumulare al lui B.

Notă istorică. *Karl Weierstrass* (1815-1897) a fost profesor la Berlin şi a avut o influenţă covârşitoare la dezvoltarea Analizei Matematice. S-a născut în 1815 în Ostenfelde, Bavaria. Între 1829 şi 1834 urmează cursurile gimnaziului catolic din Paderborn, unde capătă o instrucţie matematică mult peste ceea ce se aştepta la acel nivel (citea regulat Crelle's Journal). În 1834, la insistenţele tatălui său şi împotriva voinţei sale de a studia matematica, se înscrie la Universitatea din Bonn pentru a studia dreptul, finanţele şi economia. Rezultatul acestui conflict a fost o perioadă de 4 ani de viaţă uşoară, nededicată studiului acestor ştiinţe. A studiat însă matematica pe cont propriu. În 1839 se înscrie la Academia din Münster, unde îl întâlneşte pe Gudermann, care l-a încurajat puternic în studiile sale matematice. În 1841 este numit profesor la gimnaziul din Münster, iar în 1842 la cel din Deutsche Krone unde stă până în 1848, când se mută la colegiul Hoseanum din Braunsberg. A publicat câteva articole referitoare la funcţii abeliene în revista acestui gimnaziu, care nu au avut ecou. După ce în 1854 publică în Crelle's Journal articolul "Zur Theorie der Abelschen Functionen", Universitatea din Könisberg îi decernează titlul de doctor. După o numire la Technische Hochschule din Berlin, Universitatea din Berlin îi ofera ceea ce dorea de mult, anume un post de profesor. În 1861 accentul pus pe rigoare îl va conduce la descoperirea celebrului exemplu de funcţie continuă care nu este derivabilă în nici un punct, exemplu ce a produs stupoare la acea dată. Lista studenţilor lui Weierstrass este numeroasă: Cantor, Frobenius, Hölder, Hurtwiz, Klein, Kneser, Lie, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Schwarz, Stolz. A murit, în 1897, la Berlin.

Notă istorică. *Bernard Bolzano* (1781-1848) a fost profesor de filosofia religiei la Praga, dar a avut contribuţii importante şi la dezvoltarea Analizei

Matematice, fiind, împreună cu Cauchy, un pionier în introducerea rigorii în acest domeniu.

Exerciţii

1. Să se găsească o submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ care nu este nici deschisă, nici închisă.

2. Orice submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ este reuniunea unei familii numărabile de mulţimi închise.

3. Orice submulţime închisă a lui $\mathbb{R}^n$ este intersecţia unei familii numărabile de mulţimi deschise.

4. (**Aderenţa sau închiderea unei mulţimi**) Pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overline{A}$ intersecţia tuturor submulţimilor închise a lui $\mathbb{R}^n$ care conţin pe A.

$\overline{A}$ se numeşte închiderea lui A şi este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A.

Să se arate că:

i) $\overline{A}$ este o mulţime închisă;

ii)

$$A \subseteq \overline{A};$$

iii)

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A};$$

iv)

$$A \text{ este închisă dacă şi numai dacă } A = \overline{A};$$

v)

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x,r) \cap A\} \neq \varnothing, \text{ pentru orice } r > 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \varnothing, \text{ pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } x\};$$

vi)

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B};$$

vii) Este adevărat că

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}\ ?$$

5. (**Interiorul unei mulţimi**) Pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overset{\circ}{A}$ reuniunea tuturor submulţimilor deschise a lui $\mathbb{R}^n$ care sunt conţinute în A.

$\overset{\circ}{A}$ se numeşte interiorul lui A şi este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulţime deschisă care este conţinută în A.

Să se arate că:

i) $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă;

ii)

$$\mathring{A} \subseteq A;$$

iii)

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A};$$

iv)

$$A \text{ este deschisă dacă şi numai dacă } A = \mathring{A};$$

v)

$$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{există } r > 0, \text{ astfel încât } B(x,r) \subseteq A\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{există o mulţime deschisă astfel încât } x \in D \subseteq A\};$$

vi)

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{A \cap B};$$

vii)

$$\mathring{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n;$$

viii) Există o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$ astfel ca $\mathring{A} = \emptyset$ şi $\overline{A} = \mathbb{R}^n$?

6. Să se arate că, pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, avem:

$$\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - \mathring{A}$$

şi

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - \overline{A}.$$

7. Să se arate că dacă A şi B sunt mulţimi deschise din $\mathbb{R}$, atunci $A \times B$ este mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$.

8. Fie A şi B submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Atunci $A \times B$ este o mulţime închisă din $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă A şi B sunt mulţimi închise din $\mathbb{R}$.

9. (*Acest exerciţiu va fi folosit în cadrul demonstraţiei Teoremei Arzelà-Ascoli.*) Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci există o submulţime numărabilă C a lui A astfel că dacă $x \in A$ şi $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, atunci există un element $z \in C$ astfel ca $\|x - z\| < \varepsilon$. Deci, orice element al lui A este fie în C, fie este un punct de acumulare al lui C.

10. Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci $x \in \mathbb{R}^n$ este un punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă orice vecinătate a lui x conţine o infinitate de puncte din A.

11. O submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ nu are puncte de acumulare. Există submulţimi nemărginite ale lui $\mathbb{R}^n$ care nu au puncte de acumulare.

12. (**Frontiera unei mulţimi**) Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct frontieră al lui A dacă orice vecinătate a lui x conţine (cel puţin) un punct din A şi (cel puţin) un punct din $\mathbb{R}^n - A$.

Mulţimea punctelor frontieră se notează cu $Fr(A)$.

Să se arate că

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Să se arate că mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacă nu conţine nici unul dintre punctele sale frontieră.

Să se arate că mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă conţine toate punctele sale frontieră.

Să se arate că, dacă B este o altă submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci

$$Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$$

şi

$$Fr(A \cap B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B).$$

Să se arate că

$$Fr(A \cup Fr(A) \subseteq Fr(A).$$

Observaţie. *Noţiunea de frontieră a unei mulţimi $\mathbb{R}^n$ din intervine în mod esenţial în a doua teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă (vezi pagina), precum şi în demonstraţiile lemelor de la paginile .*

13. Să se determine $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, A' şi $Fr(A)$, pentru următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}$:

a) $A = [0, 1] \cup \{2\}$;
b) $A = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$;
c) $A = \mathbb{Q}$;
d) $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$;
e) $A = \mathbb{N}$.

Teorema de structură a mulţimilor deschise

Rezultatul de mai jos arată că intervalele deschise constituie "cărămizile" cu ajutorul cărora se poate construi orice mulţime deschisă a dreptei reale.

Teorema de structură a mulţimilor deschise. *Orice mulţime deschisă şi nevidă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale deschise, disjuncte două câte două.*

Demonstraţie. Fie U o mulţime deschisă a dreptei reale.

Pentru un punct $x \in U$ vom construi cel mai mare interval deschis care conţine pe x şi care este conţinut în U, interval notat cu I_x şi numit componentă a lui U.

Deoarece U este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U.$$

Fie

$$S = \{y \in \mathbb{R} \mid x < y \text{ şi } y \notin U\}.$$

Dacă $S = \varnothing$, atunci

$$(x, \infty) \subseteq U.$$

Dacă $S \neq \varnothing$, atunci, cum S este minorată, există $\zeta = \inf S$.

Atunci

$$\zeta \notin U.$$

Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $\zeta \in U$, atunci, cum U este deschisă, există $\delta > 0$ astfel încât $(\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U$.

Deoarece $\inf S = \zeta < \zeta + \delta$, există $y \in S$ cu proprietatea că

$$\zeta - \delta < \zeta < y < \zeta + \delta,$$

deci

$$y \in (\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U,$$

de unde obţinem contradicţia

$$y \notin S.$$

În particular, avem

$$x \neq \zeta.$$

De asemenea, avem

$$(x, \zeta) \subseteq U.$$

Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există $x_0 \in (x, \zeta)$ astfel încât $x_0 \notin U$, atunci $x_0 \in S$, de unde contradicţia $\zeta \leq x_0$.

O construcţie analoagă la stânga punctului x ne asigură existenţa unui interval deschis

$$I_x = (\eta, \zeta) \subseteq U,$$

unde $\eta, \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, cu proprietatea că $\eta, \zeta \notin U$.

Este evident că

$$U = \bigcup_{x \in U} I_x.$$

Fie $I_{x_1} = (\eta_1, \zeta_1)$ şi $I_{x_2} = (\eta_2, \zeta_2)$ două componente ale lui U.

Dacă $I_{x_1} \cap I_{x_2} \neq \varnothing$, atunci

$$I_{x_1} = I_{x_2}.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$.

Atunci $\eta_1 < x_0 < \zeta_1$ şi $\eta_2 < x_0 < \zeta_2$.

Dacă $\zeta_1 < \zeta_2$, atunci $\eta_2 < x_0 < \zeta_1 < \zeta_2$, de unde $\zeta_1 \in (\eta_2, \zeta_2) \subseteq U$, contradicţie care arată că $\zeta_1 \geq \zeta_2$. Similar obţinem $\zeta_1 \leq \zeta_2$.

Deci $\zeta_1 = \zeta_2$. Analog se arată că $\eta_1 = \eta_2$.

În concluzie $I_{x_1} = I_{x_2}$.

Dacă $\mathcal{M}$ reprezintă familia componentelor distincte ale lui U, putem considera funcţia $f : \mathcal{M} \to \mathbb{Q}$ dată de

$$f(I_x) = r_x,$$

unde $r_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$.

Deoarece elementele familiei $\mathcal{M}$ sunt distincte, f este injectivă, deci, cum $\mathbb{Q}$ este numărabilă, $\mathcal{M}$ este cel mult numărabilă.

Observaţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\eta < a < b < \zeta.$$

Atunci

$$I_x = (\eta, \zeta) = (\eta, a] \cup [a, b] \cup [b, \zeta). \tag{*}$$

Cum

$$\frac{1}{a - \eta} > 0,$$

datorită faptului că $\mathbb{R}$ este corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n_0 > \frac{1}{a - \eta}.$$

Atunci

$$(\eta, a] = \underset{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0}{\cup}[\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Într-adevăr, incluziunea $\supseteq$ este imediată.

Pentru a justifica incluziunea $\subseteq$, vom considera $x \in (\eta, a]$.

Dacă $x \in [\eta + \frac{1}{n_0}, a]$, atunci

$$x \in \underset{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0}{\cup}[\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Dacă $x \in (\eta, \eta + \frac{1}{n_0}]$, atunci cu notaţia $n = [\frac{1}{x-\eta}]$, avem

$$n \leq \frac{1}{x-\eta} < n + 1,$$

i.e.

$$\eta + \frac{1}{n+1} < x \leq \eta + \frac{1}{n},$$

adică

$$x \in [\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}].$$

Cum

$$x \in (\eta, \eta + \frac{1}{n_0}),$$

avem

$$n_0 < \frac{1}{x-\eta},$$

de unde

$$n_0 \leq n = [\frac{1}{x-\eta}],$$

deci

$$x \in \underset{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0}{\cup}[\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Prin urmare incluziunea $\subseteq$ este justificată.

Aşadar intervalul $(\eta, a]$ se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.

Similar se justifică faptul că intervalul $[b, \zeta)$ se bucură de aceeaşi proprietate, deci, conform cu $(*)$, intervalul $I_x = (\eta, \zeta)$ se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.

Deducem astfel, din teorema de structură a mulţimilor deschise din $\mathbb{R}$, că *orice mulţime deschisă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.*

De fapt are un loc un fenomen mai general, anume, dacă prin cub din $\mathbb{R}^n$ înţelegem produsul cartezian a n intervale închise de aceeaşi lungime, atunci *orice mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte (vezi [2], paginile 71-72).*

Acest fapt este util pentru a realiza o comparaţie între măsura Jordan şi măsura Lebesgue.

Marginile unei mulţimi mărginite de numere reale sunt puncte aderente ale mulţimii

Teoremă. *Fie A o mulţime mărginită de numere reale.*
Atunci:
i) $\sup A \in \overline{A}$ *şi* $\inf A \in \overline{A}$*;*
ii) dacă $\sup A \notin A$*, atunci* $\sup A \in A^{'}$ *şi dacă* $\inf A \notin A$*, atunci* $\inf A \in A^{'}$*.*
Demonstraţie.
i) Pentru orice vecinătate V a lui $\sup A$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \subseteq V.$$

Atunci, conform caracterizării cu ε a marginilor unei mulţimi, există $a \in A$ astfel încât

$$\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A,$$

deci

$$a \in (\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \cap A \subseteq V \cap A,$$

adică

$$V \cap A \neq \varnothing,$$

ceea ce arată că $\sup A \in \overline{A}$.
Similar se dovedeşte că $\inf A \in \overline{A}$.
ii) Dacă $\sup A \notin A$, raţionamentul de mai sus arată

$$\{V - \{\sup A\}\} \cap A \neq \varnothing,$$

deci

$$\sup A \in A^{'}.$$

Similar se justifică afirmaţia privitoare la inf.

Definiţia spaţiului topologic

Din cele discutate mai sus se degajă la un nivel de abstractizare mai ridicat următoarele definiţii:

Definiţie. *Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte topologie pe X o familie de submulţimi ale lui X, notată τ, care verifică următoarele trei axiome:*

1) $\emptyset$, $X \in \tau$

2) D_1, $D_2 \in \tau$ implică $D_1 \cap D_2 \in \tau$

3) Dacă $D_i \in \tau$, pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \tau$.

Definiţie. *Se numeşte spaţiu topologic un dublet (X, τ), unde τ este o topologie pe mulţimea X.*

Elementele mulţimii τ se numesc mulţimi deschise.

Observaţie. *Noţiunile de mulţime închisă, vecinătate a unui punct, punct interior al unei mulţimi, punct de acumulare al unei mulţimi, închiderea unei mulţimi, interiorul unei mulţimi şi cea de frontieră a unei mulţimi au sens în cadrul mai general al unui spaţiu topologic (vezi [1]).*.

Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Propoziţie. *Mulţimea*

$$\tau = \{D \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ şi } y \in \mathbb{R}\} \cup$$

$$\cup \{D \cup (x, \infty] \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ şi } x \in \mathbb{R}\} \cup$$

$$\cup \{D \cup [-\infty, y) \cup (x, \infty] \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ şi } x, y \in \mathbb{R}\}$$

este o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$, numită topologia uzuală pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Observaţie. *Ca atare, toate noţiunile topologice descrise mai sus au sens în $\overline{\mathbb{R}}$.*

REZUMAT

O submulţime D a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte deschisă în $\mathbb{R}^n$ (sau simplu, deschisă) dacă pentru orice punct x din D există un număr real strict pozitiv r astfel ca bila deschisă cu centrul x şi raza r să fie conţinută în D.

O submulţime F a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte închisă în $\mathbb{R}^n$ (sau simplu, închisă) dacă $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, atunci orice mulţime care conţine o mulţime deschisă (în $\mathbb{R}^n$) ce conţine x se numeşte vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct interior al mulţimii A dacă aceasta este o vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă orice vecinătate (în $\mathbb{R}^n$) a lui x conţine cel puţin un punct al lui A diferit de x.

Un interval închis I din $\mathbb{R}^n$ este produsul a n intervale închise din $\mathbb{R}$.

O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există un interval în care este conţinută.

Teoremă (a intervalelor nevide închise incluse). Fie $(I_m)_{m\geq 1}$ un şir de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$, deci, astfel ca $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_m \supseteq I_{m+1} \supseteq ...$. Atunci există un element din $\mathbb{R}^n$ care se află în fiecare interval.

Teorema Bolzano - Weierstrass. Orice submulţime mărginită şi infinită a lui $\mathbb{R}^n$ are un punct de acumulare.

Pentru o submulţime A, a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overline{A}$ intersecţia tuturor submulţimilor închise a lui $\mathbb{R}^n$ care conţin pe A. $\overline{A}$ se numeşte închiderea lui A şi este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A.

Pentru o submulţime A, a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overset{\circ}{A}$ reuniunea tuturor submulţimilor deschise a lui $\mathbb{R}^n$ care sunt conţinute în A. $\overset{\circ}{A}$ se numeşte interiorul lui A şi este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulţime deschisă care este conţinută în A.

Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct frontieră al lui A dacă orice vecinătate a lui x conţine (cel puţin) un punct din A şi (cel puţin) un punct din $\mathbb{R}^n - A$. Mulţimea

punctelor frontieră se notează cu $Fr(A)$ şi avem $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

Orice mulţime deschisă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale deschise, disjuncte două câte două.

Fie A o mulţime mărginită de numere reale. Atunci $\sup A \in \overline{A}$ şi $\inf A \in \overline{A}$.

Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte topologie pe X o familie de submulţimi ale lui X notată τ care verifică următoarele trei axiome: 1) $\emptyset$, $X \in \tau$; 2) D_1, $D_2 \in \tau$ implică $D_1 \cap D_1 \in \tau$; 3) Dacă $D_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \tau$. Se numeşte spaţiu topologic un dublet (X, τ), unde τ este o topologie pe mulţimea X. Elementele mulţimii τ se numesc mulţimi deschise.

Mulţimea $\tau = \{D \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup (x, \infty] \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \cup (x, \infty] \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $x, y \in \mathbb{R}\}$ este o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$, numită topologia uzuală pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *G. B. Folland*, **Real Analysis, Modern Techinques and Their Applications**, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

3. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme,** Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23777

CONEXITATE ŞI COMPACITATE

Mulţimi conexe
Mulţimi compacte
Teorema Heine-Borel
Teorema lui Cantor

Mulţimi conexe

Unele spaţii pot fi împărţite în mod mod natural în două sau mai multe părţi. De exemplu, spaţiul care constă din două drepte care nu se intersectează poate fi împărţit în cele două drepte. Iată un alt exemplu: complementara în plan a unui cerc constă din două părţi: punctele aflate în interiorul acestui cerc şi punctele aflate în afara lui. La fel, dacă p este un punct al dreptei L, atunci complementara în L a acestui punct se împarte în mod natural în două semidrepte determinate de p (îndepărtarea lui p divide L în două părţi). În fiecare din exemplele precedente împărţirea apare în mod natural şi este unică. Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale admite o astfel de împărţire în mai multe moduri. Fiecare număr iraţional x produce o împărţire a mulţimii $\mathbb{Q}$ în mulţimea acelor numere raţioanle care sunt mai mici decât x şi mulţimea numerelor raţionale mai mari decât x. Mulţimea numerelor iraţionale poate fi, la fel, împărţită în mai multe moduri prin diferite numere raţionale. Pe de altă parte, unele mulţimi nu pot fi împărţite în părţi în nici un mod natural; acest lucru este valabil de exemplu pentru dreaptă, pentru segmentul de dreaptă, pentru un plan şi pentru discul circular. Este desigur posibilă o împărţire forţată a spaţiului respectiv. De exemplu, dacă I este intervalul $[a, b]$ şi c este un număr care satisface condiţia $a < c < b$, atunci c împarte I în două intervale $[a, c]$ şi $[c, b]$. Însă, deoarece ele au un punct comun c, această împărţire nu poate fi privită ca satisfăcătoare. Am putea face o împărţire îndepărtând punctul c din una dintre mulţimi, să zicem din a doua. Fie $A = [a, c]$ şi $B = (c, b]$; atunci $A \cup B = I$ şi $A \cap B = \varnothing$. Dar o astfel de împărţire sau "rupere" a lui I nu este naturală, deoarece mulţimea B se "lipeşte" de A în punctul c. Dacă îndepărtăm punctul c şi din A pentru a elimina "lipirea", atunci $A \cup B \neq I$ dar $A \cup B$ este complementara punctului c în I; deci acest exemplu este analog exemplului legat de complementara punctului p pe dreapta L. (Introducere în topologie, W.G. Chinn, N.E. Steenrod, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981, paginile 51-52).

O analiză atentă a rezultatelor de analiză matematică studiate în liceu ne arată că un rol esenţial l-au jucat intervalele, adică mulţimile constituite dintr-o "bucată". În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestui concept, anume noţiunea de mulţime conexă.

Definiţie. *O submulţime D a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte neconexă dacă există două mulţimi deschise A şi B cu proprietatea că $A \cap D$ şi $B \cap D$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este D.*

Definiţie. *O submulţime C a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte conexă dacă nu este neconexă.*

Exemple

1. $\mathbb{N}$ este neconexă în $\mathbb{R}$.

2. Mulţimea $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ este neconexă în $\mathbb{R}$.

3. $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ este neconexă în $\mathbb{R}$.

Teoremă. *Mulţimea $I = [0, 1]$ este conexă în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două mulţimi deschise A şi B astfel ca $A \cap I$ şi $B \cap I$ sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este I.

Să presupunem că $1 \in B$.

Fie $c = \sup(A \cap I) \in A \cup B$.

Dacă $c \in A$, atunci $c \in (0, 1)$.

Deoarece A este deschisă şi îl conţine pe c, atunci există puncte din $A \cap I$ mai mari decât c, ceea ce contrazice definiţia lui c.

Dacă $c \in B$, atunci $c \in (0, 1]$.

Deoarece B este deschisă şi îl conţine pe c, atunci există $c_1 < c$ astfel ca intervalul $[c_1, 1]$ este conţinut în $B \cap I$, ceea ce contrazice definiţia lui c.

Prin urmare, I este o mulţime conexă.

Observaţie. *Similar se arată că mulţimea $(0, 1)$ este conexă în $\mathbb{R}$.*

Observaţie. *De fapt are loc un fenomen mai general, anume o submulţime a lui $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval (vezi [1], pagina 134).*

Teoremă. *Mulţimea $\mathbb{R}^n$ este conexă (în $\mathbb{R}^n$).*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două mulţimi deschise A şi B astfel ca $A \cap \mathbb{R}^n$ şi $B \cap \mathbb{R}^n$ sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este $\mathbb{R}^n$.

Fie $x \in A$ şi $y \in B$.

Atunci

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \,|x + t(y - x) \in A\}$$

şi

$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} \,|x + t(y - x) \in B\}$$

sunt două mulţimi deschise (din $\mathbb{R}$), astfel încât $A_1 \cap [0, 1]$ şi $B_1 \cap [0, 1]$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este $[0, 1]$.

Prin urmare $[0, 1]$ nu este conexă (în $\mathbb{R}$), contradicţie care încheie demonstraţia.

Corolar. *Singurele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^n$ care sunt deschise şi închise sunt $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ care este deschisă şi închisă.

Atunci $B = \mathbb{R}^n - A$ este de asemenea deschisă şi închisă.

Dacă A nu este $\emptyset$ sau $\mathbb{R}^n$, atunci A şi B sunt două mulţimi deschise, nevide, disjuncte şi reuniunea lor este $\mathbb{R}^n$, ceea ce contrazice teorema de mai sus.

Aşadar, A este $\emptyset$ sau $\mathbb{R}^n$.

Exerciţiu. O submulţime deschisă A a lui $\mathbb{R}^n$ este conexă dacă şi numai dacă nu există două submulţimi deschise, nevide, disjuncte ale lui $\mathbb{R}^n$ a căror reuniune să fie mulţimea A.

Este util, uneori, să avem un alt criteriu pentru a decide dacă o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ este conexă.

În acest scop avem nevoie de următoarea definiţie.

Definiţie. *Segmentul, din $\mathbb{R}^n$, de capete $x, y \in \mathbb{R}^n$ este mulţimea*

$$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \textit{există } t \in [0, 1] \textit{ astfel încât } u = x + t(y - x)\},$$

care se notează cu $[x, y]$.

Definiţie. *O linie poligonală care uneşte punctele x şi y, din $\mathbb{R}^n$, este o mulţime P pentru care există segmentele L_1, L_2, ..., L_n, din $\mathbb{R}^n$, astfel*

încât L_1 *are extremităţile* x *şi* z_1*,* L_2 *are extremităţile* z_1 *şi* z_2*, ...,* L_n *are extremităţile* z_{n-1} *şi* y*, iar*

$$P = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n.$$

Teoremă. *Fie* G *o mulţime deschisă din* $\mathbb{R}^n$*. Atunci* G *este conexă dacă şi numai dacă orice două puncte din* G *pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în* G*.*

Demonstraţie.

"$\Leftarrow$" Să presupunem că G nu este conexă.

Atunci există A şi B două mulţimi deschise astfel încât $A \cap G$ şi $B \cap G$ sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este G.

Fie

$$x \in A \cap G$$

şi

$$y \in B \cap G.$$

Conform ipotezei, există segmentele L_1, L_2, ..., L_n, din G, astfel încât L_1 are extremităţile x şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2, ..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi y.

Fie k cel mai mic număr natural astfel încât extremitatea z_{k-1} a lui L_k se află în $A \cap G$, iar z_k se află în $B \cap G$.

Atunci mulţimile

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \,|z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\}$$

şi

$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} \,|z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in B \cap G\}$$

au proprietatea că sunt mulţimi deschise, iar $A_1 \cap [0,1]$ şi $B_1 \cap [0,1]$ sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este $[0,1]$.

Prin urmare am obţinut o contradicţie, anume aceea că $[0,1]$ nu este mulţime conexă.

"$\Rightarrow$" Fie $x \in G$.

Fie

$G_1 = \{y \in G \mid$ există segmentele $L_1, L_2, ..., L_n$ din G, astfel încât $L_1$are extremităţile x

şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2,..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi $y\}$

şi

$G_2 = \{y \in G \mid$ nu există segmente $L_1, L_2, ..., L_n$ din G, astfel încât L_1 are extremităţile x şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2,..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi $y\}$.

Evident
$$G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$
Cum $x \in G_1$, deducem că G_1 este nevidă.

Vom arăta că G_1 este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Fie
$$y \in G_1 \subseteq G.$$
Deoarece G este mulţime deschisă, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca
$$\|w - y\| < r \Rightarrow w \in G.$$
Dar, folosind definiţia lui G_1, există segmentele L_1, L_2, ..., L_n, din G, astfel încât L_1 are extremităţile x şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2, ..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi y.

Pentru un $w \in \mathbb{R}^n$, astfel ca $\|w - y\| < r$, va rezulta că există segmentele L_1, L_2, ..., L_n şi $[y, w]$, din G, astfel încât L_1 are extremităţile x şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2, ..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi y, $[y, w]$ are extremităţile y şi w, deci $w \in G_1$.

Prin urmare G_1 este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Similar se arată că G_2 este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Atunci G_2 este vidă (căci altfel se contrazice faptul că G este conexă), ceea ce încheie demonstraţia acestei implicaţii.

Mulţimi compacte

O privire atentă asupra materiei de analiză matematică studiată în liceu relevă importanţa intervalelor închise şi mărginite. În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestui concept, anume noţiunea de mulţime compactă.

Definiţie. *O submulţime K a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte compactă dacă pentru orice $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$ astfel ca $K \subseteq \underset{\alpha \in A}{\cup} D_\alpha$, există $J \subseteq A$, J*

finită, astfel ca $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$, *i.e. pentru orice acoperire cu mulţimi deschise, din* $\mathbb{R}^n$, *a lui* K, *există o subacoperire finită a sa.*

Observaţie. *Esenţa definiţiei de mai sus constă în faptul ca prin intermediul ei se face trecerea de la o familie arbitrară de mulţimi deschise la o familie finită de astfel de astfel de mulţimi.*

Exemple

1. Orice submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă.
2. $[0, \infty)$ nu este compactă (în $\mathbb{R}$).
3. $(0, 1)$ nu este compactă (în $\mathbb{R}$).
4. $[0, 1]$ este compactă (în $\mathbb{R}$).

Teorema Heine-Borel

Nu este uşor să se arate, folosind numai definiţia, că o mulţime este compactă.

De aceea, următorul rezultat, care caracterizează mulţimile compacte din $\mathbb{R}^n$, este foarte util.

Teorema Heine-Borel. *O submulţime a lui* $\mathbb{R}^n$ *este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.*

Notă istorică. *Heinrich Eduard Heine* (1821-1881) a studiat la Berlin, fiind studentul lui Weierstrass, Gauss şi Dirichlet. A predat la Bonn şi la Halle. Pe lângă teorema de mai sus, o altă contribuţie importantă a sa este formularea conceptului de continuitate uniformă.

Notă istorică. *Emile Borel* (1871-1956), studentul lui Hermite, a fost profesor la Paris şi unul dintre cei mai influenţi matematicieni. A studiat la École Normale Supérieure din Paris. În 1893, pe când avea numai 22 de ani, este numit la Universitatea din Lille, iar în 1896 la École Normale Supérieure (unde, timp de 10 ani, începând cu anul 1910, este director). În 1909 devine titularul catedrei de teoria funcţiilor (creată special pentru el) de la Sorbona, poziţie pe care o va deţine până în 1941. Din 1921 este membru al Academiei de Ştiinţe, al cărui preşedinte devine în 1934. Împreună cu Lebesgue şi Baire, este fondatorul teoriei măsurii. Este unul dintre fondatorii teoriei jocurilor. A fost membru al Camerei Deputaţilor a parlamentului francez (1924-1936), precum şi ministru al navigaţiei (1925-1940). În 1941 este arestat de către

regimul de la Vichy, după care devine membru al rezistenţei franceze. Cele mai importante opere ale lui Borel sunt: Le Hasard (1913), L'éspace et le temps (1921), Traité du calcul de probabilité et ses applications (1924-34), Les paradoxes de l'infini (1946).

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Fie K o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$.

Vom arăta că K este închisă.

Fie, în acest sens, $x \in \mathbb{R}^n - K$.

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, să considerăm mulţimile deschise

$$G_m = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| > \frac{1}{m}\}.$$

Atunci

$$\underset{m \in \mathbb{N}}{\cup} G_m = \mathbb{R}^n - \{x\},$$

deci

$$K \subseteq \underset{m \in \mathbb{N}}{\cup} G_m.$$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$K \subseteq G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_{n_0} \subseteq G_{n_0}.$$

Atunci

$$\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \frac{1}{n_0}\} \subseteq \mathbb{R}^n - K,$$

ceea ce arată, având în vedere că x a fost ales arbitrar, că $\mathbb{R}^n - K$ este deschisă, deci K este închisă.

Să arătăm că K este mărginită.

Fie mulţimile deschise

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < m\},$$

unde $m \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$K \subseteq \mathbb{R}^n = \underset{m \in \mathbb{N}}{\cup} H_m.$$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca

$$K \subseteq H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_{n_0} \subseteq H_{n_0},$$

ceea ce arată că K este mărginită.

"$\Leftarrow$"

Fie $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ astfel ca

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha.$$

Deoarece K este mărginită, există un interval închis I_1, din $\mathbb{R}^n$, astfel ca

$$K \subseteq I_1.$$

Spre exemplu, putem alege

$$I_1 = \{(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \mid |\zeta_i| < r, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, ..., n\}\},$$

pentru un r suficient de mare.

Să presupunem că K nu este conţinută în nici o reuniune finită de elemente din mulţimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Atunci, cel puţin unul dintre cele 2^n intervale închise obţinute prin înjumătăţirea "laturilor" lui I_1 conţine puncte din K şi intersecţia lui K cu acest interval nu este conţinută în nici o reuniune finită de elemente din mulţimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Fie I_2 un astfel de interval.

Continuând acest procedeu obţinem un şir $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, mulţimea nevidă $K \cap I_n$ nu este conţinută în nici o reuniune finită de elemente din mulţimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Fie

$$y \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Atunci y este un punct de acumulare al lui K.

Cum K este închisă, $y \in K$, deci există $\alpha_0 \in A$, astfel ca

$$y \in D_{\alpha_0}.$$

Prin urmare, există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea următoare:

$$\|w - y\| < \varepsilon \Rightarrow w \in D_{\alpha_0}.$$

Întrucât lungimea laturilor lui I_k este $\frac{r}{2^{k-2}}$, avem că

$$w \in I_k \Rightarrow \|w - y\| < \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}},$$

deci dacă k este ales astfel ca

$$\frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

atunci toate punctele lui I_k se găsesc în D_{α_0}, ceea ce contrazice faptul că $I_k \cap K$ nu este conţinută în nici o reuniune finită de elemente din mulţimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Teorema lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat datorat lui Cantor care întăreşte proprietatea de completitudine anterioară, aici fiind considerate mulţimi închise mărginite, în loc de intervale. Vom folosi acest rezultat în cadrul demonstraţiei teoremei lui Baire şi a lui Dini.

Teorema lui Cantor. *Fie F_1 o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, închisă, nevidă şi mărginită, iar*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq ...$$

un şir de mulţimi nevide şi închise.

Atunci există un punct din $\mathbb{R}^n$ care aparţine tuturor mulţimilor F_n.

Demonstraţie. Conform teoremei lui Heine-Borel, F_1 este o mulţime compactă.

Să considerăm mulţimile deschise

$$G_k = \mathbb{R}^n - F_k,$$

unde $k \in \mathbb{N}$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \emptyset.$$

Atunci

$$F_1 \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k,$$

şi cum F_1 este o mulţime compactă, există G_1, G_2, ..., G_p astfel ca

$$F_1 \subseteq \bigcup_{k\in\{1,2,\ldots,p\}} G_k \subseteq G_p,$$

deci

$$F_p \subseteq F_1 \cap F_p = \emptyset,$$

de unde contradicţia $F_p = \emptyset$.

Ca atare, demonstraţia este încheiată.

Observaţie. *Conceptele de mulţime conexă şi mulţime compactă au sens în cadrul mai larg al unui spaţiu topologic (vezi [1]).*

Exerciţii

1. Să se arate, fără a folosi teorema Heine-Borel, că dacă K este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$, iar $F \subseteq K$ este o mulţime închisă, atunci F este compactă (în $\mathbb{R}^n$).

2. Să se arate că dacă K este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$, atunci K este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^2$.

3. Dacă K este o mulţime compactă din $\mathbb{R}^n$, iar x un punct arbitrar din $\mathbb{R}^n$, atunci mulţimea $K_x = \{x + y \mid y \in K\}$ este de asemenea compactă.

4. Să se precizeze când este compactă intersecţia a două mulţimi deschise. Este posibil ca intersecţia unei familii infinite de mulţimi deschise să fie o mulţime nevidă compactă?

REZUMAT

O submulţime D a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte neconexă dacă există două mulţimi deschise A şi B cu proprietatea că $A \cap D$ şi $B \cap D$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este D. O submulţime C a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte conexă dacă nu este neconexă.

O submulţime a lui $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.

Mulţimea $\mathbb{R}^n$ este conexă (în $\mathbb{R}^n$).

Singurele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^n$ care sunt deschise şi închise sunt $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$.

Segmentul, din $\mathbb{R}^n$, de capete $x, y \in \mathbb{R}^n$ este mulţimea $\{u \in \mathbb{R}^n$ |există $t \in [0,1]$ astfel încât $u = x + t(y - x)\}$, care se notează cu $[x, y]$. O linie poligonală care uneşte punctele x şi y, din $\mathbb{R}^n$, este o mulţime P pentru care există segmentele L_1, L_2, ..., L_n, din $\mathbb{R}^n$, astfel încât L_1 are extremităţile x şi z_1, L_2 are extremităţile z_1 şi z_2, ..., L_n are extremităţile z_{n-1} şi y, iar $P = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$.

Fie G o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Atunci G este conexă dacă şi numai dacă orice două puncte din G pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în G.

O submulţime K a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte compactă dacă pentru orice $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$ astfel ca $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$, există $J \subseteq A$, J finită, astfel ca $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$, i.e. pentru orice acoperire cu mulţimi deschise, din $\mathbb{R}^n$, a lui K, există o subacoperire finită a sa.

O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

Fie F_1 o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, închisă, nevidă şi mărginită, iar

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq ...$$

un şir de mulţimi nevide şi închise.

Atunci există un punct din $\mathbb{R}^n$ care aparţine tuturor mulţimilor F_n.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme,** Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23777

COMPLEMENTE DE TOPOLOGIE

Teorema de acoperire a lui Lebesgue
Teorema lui Baire

Teorema de acoperire a lui Lebesgue

Precizări privind natura acoperirilor cu mulţimi deschise ale mulţimilor compacte sunt furnizate de următorul rezultat care va fi folosit în studiul uniform continuităţii, precum şi în teoria dimensiunii şi în teoria spaţiilor uniforme.

Teorema de acoperire a lui Lebesgue. *Fie* $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *o acoperire cu mulţimi deschise din* $\mathbb{R}^n$ *a unei submulţimi compacte* K *a lui* $\mathbb{R}^n$*.*

Atunci există un număr real strict pozitiv λ*, astfel ca pentru orice* $x, y \in K$*, cu* $\|x - y\| < \lambda$*, există* $\alpha \in A$ *astfel ca*

$$x, y \in D_\alpha.$$

Notă istorică. *Henri Léon Lebesgue* (1875-1941) a fost fondatorul integralei care îi poartă numele A studiat la Şcoala Normală Superioară în perioada 1899-1902. Este autorul uneia din cele mai remarcabile cuceriri ale analizei moderne, anume teoria integralei care-i poartă numele, teorie ce a permis un studiu mai profund al seriilor Fourier. În 1910 este numit profesor la Sorbona.

Demonstraţie. Pentru orice punct u a lui K, există $\alpha_u \in A$ astfel ca

$$u \in D_{\alpha_u}.$$

Fie $\delta_u > 0$ astfel ca

$$\|v - u\| < 2\delta_u \Rightarrow v \in D_{\alpha_u}.$$

Atunci $\{S_u\}_{u \in K}$, unde

$$S_u = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - u\| < \delta_u\},$$

este o acoperire a lui K cu mulţimi deschise.

Prin urmare, cum K este compactă, există u_1, u_2, ..., $u_p \in K$, astfel ca

$$K \subseteq S_{u_1} \cup S_{u_2} \cup ... \cup S_{u_p}.$$

Alegem

$$\lambda = \min\{\delta_{u_1}, \delta_{u_2}, ..., \delta_{u_p}\} > 0.$$

Dacă $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \lambda$, atunci există $j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel ca

$$x \in S_{u_j} \subseteq D_{\alpha_{u_j}},$$

deci

$$\|x - u_j\| < \delta_{u_j}.$$

Atunci

$$\|y - u_j\| \leq \|y - x\| + \|x - u_j\| < \lambda + \delta_{u_j} < 2\delta_{u_j},$$

şi drept urmare

$$y \in D_{\alpha_{u_j}}.$$

Aşadar

$$x, y \in D_{\alpha_{u_j}}.$$

Observaţie. Cu notaţia $diam(A) = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$, unde A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, teorema lui Lebesgue se reformulează astfel: *Fie* $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *o acoperire cu mulţimi deschise din* $\mathbb{R}^n$ *a unei submulţimi compacte* K *a lui* $\mathbb{R}^n$. *Atunci există un număr real strict pozitiv* λ*, astfel ca pentru orice submulţime* A *a lui* K *având diametrul mai mic decât* λ*, există* $\alpha_0 \in A$ *astfel ca* $A \in D_{\alpha_0}$.

Teorema lui Baire

Teorema lui Baire, în forma de mai jos, dar mai ales sub alte forme mai generale, constituie un instrument extrem de fin care are o gamă largă de aplicaţii. Unele dintre ele se vor studia în cadrul cursului de analiză funcţională (anume Teorema aplicaţiei deschise, Teorema graficului închis şi Principiul mărginirii uniforme). Pentru multe alte aplicaţii vezi [1].

Teorema lui Baire. *Fie* $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *o familie numărabilă de submulţimi închise din* $\mathbb{R}^n$ *astfel încât* $\underset{k \in \mathbb{N}}{\cup} H_k$ *conţine o mulţime nevidă deschisă.*

Atunci cel puţin una dintre mulţimile H_k conţine o mulţime nevidă deschisă.

Observaţie. *Rezultatul de mai sus poate fi reformulat în una dintre următoarele forme echivalente:*

i) Orice intersecţie numărabilă de mulţimi deschise dense în $\mathbb{R}^n$ este densă în $\mathbb{R}^n$.

ii) Orice reuniune numărabilă de mulţimi închise în $\mathbb{R}^n$ cu interiorul vid este o mulţime cu interiorul vid.

Observaţie. *Dacă mulţimile familiei nu sunt deschise, rezultatul nu este valabil (de exemplu mulţimile $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$, însă intersecţia lor este vidă). De asemenea, dacă familia de mulţimi nu este cel mult numărabilă, rezultatul nu este valabil (de exemplu mulţimile $\mathbb{R} - \{x\}$, unde $x \in \mathbb{R}$, sunt deschise şi dense în $\mathbb{R}$, însă intersecţia lor este vidă).*

Notă istorică. *René Luois Baire* (1874-1932) a fost profesor la Dijon. A adus contribuţii la teoria mulţimilor şi la analiză reală. Baire s-a născut la 21 ianuarie 1874 la Paris. În 1886, pe când avea 12 ani, a cîştigat o bursă care i-a permis să capete o bună educaţie, în ciuda condiţiilor materiale precare oferite de familia sa. A fost un student eminent al liceului Lakanal. În 1890 studiază timp de un an la secţia specială de matematică a liceului Henri IV. Apoi trece admiterea atât la École Polytechnique, cât şi la École Normale Supérieure. Alege să studieze la cea din urmă. Aici audiază cursurile lui Goursat şi pe cele ale lui Hermite, Picard şi Poincaré la Sorbona. La un examen, având să demonstreze continuitatea funcţiei exponenţiale, în mijlocul demonstraţiei îşi dă seama că "demonstraţia pe care o învăţase la liceul Henri IV era pur şi simplu un artificiu deoarece nu se sprijinea suficient pe definiţia funcţiei". Ca rezultat imediat a urmat o notă ce nu l-a mulţumit pe Baire şi decizia de a studia din nou, mai atent, cursul de analiză matematică cu accent pe conceptul de continuitate al unei funcţii generale. A obţinut un post la un liceu din Bar-le-Duc care, deşi îi asigura securitatea financiară, nu-l mulţumea căci nu avea ocazia să fie în contact cu lumea universitară. Aici lucrează în teoria funcţiilor şi asupra conceptului de limită, elaborând o teză despre funcţii discontinue pe care o va susţine în 1899, din comisie făcând parte Darboux şi Picard. A studiat şi în Italia, unde a legat o strânsă prietenie cu Volterra. Chiar înainte de a-şi susţine doctoratul, sănătatea îi era zdruncinată. După aceea nu a mai putut contribui la progresul matematicii

decât foarte scurte perioade. A continuat să predea la diverse licee, iar în 1901 devine conferenţiar la Universitatea din Montpellier. În 1904 primeşte o bursă Peccot care îi permite să predea la Collège de France. În 1905 se mută la Universitatea din Dijon, unde în 1907 este numit profesor. Datorită stării mai mult decât precare a sănătăţii sale, cere un concediu pentru a se reface. Nefiind în stare să-şi reia activitatea, se retrage la Geneva, unde i se şi acordă titlul de Cavaler al Legiunii de Onoare şi de membru al Academiei de Ştiinţe. Se pensionează în 1925 şi moare la 5 Iulie 1932.

Baire a făcut un pas decisiv în fundamentarea riguroasă a conceptului de funcţie şi continuitate. A văzut cu claritate că o teorie a mulţimilor infinite era fundamentală pentru analiza reală. Denjoy a fost cel mai faimos student al lui Baire.

Demonstraţie. Fie G_0 o mulţime nevidă deschisă inclusă în $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} H_k$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, nu există nici o mulţime nevidă deschisă inclusă în H_k.

Dacă $x_1 \in G_0 - H_1$, atunci există $r_1 > 0$, astfel ca

$$G_1 \overset{not}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| < r_1\} \subseteq F_1 \overset{not}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| \leq r_1\} \subseteq G_0$$

şi

$$F_1 \cap H_1 = \emptyset\ .$$

La fel, dacă $x_2 \in G_1 - H_2$, atunci există $r_2 > 0$, astfel ca

$$G_2 \overset{not}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| < r_2\} \subseteq F_2 \overset{not}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_2\| \leq r_2\} \subseteq G_1$$

şi

$$F_2 \cap H_2 = \emptyset.$$

Continuând acest procedeu, obţinem, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in G_{k-1} - H_k$ şi $r_k > 0$, astfel ca

$$G_k \subseteq F_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_k\| \leq r_k\} \subseteq G_{k-1}$$

şi

$$F_k \cap H_k = \emptyset.$$

Aplicând teorema lui Cantor familiei $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, găsim un element w astfel ca

$$w \in \underset{k\in\mathbb{N}}{\cap} F_k.$$

Deoarece, $F_k \cap H_k = \emptyset$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deducem că

$$w \notin G_0 \subseteq \underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} H_k.$$

Pe de altă parte, $F_k \subseteq G_0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deci

$$w \in G_0.$$

Această contradicţie încheie demonstraţia, arătând că cel puţin una dintre mulţimile H_k conţine o mulţime nevidă deschisă.

Încheiem această secţiune cu două aplicaţii ale teoremei lui Baire.

Corolar. *Spaţiul $\mathbb{R}^2$ nu poate fi prezentat ca reuniunea unei familii numărabile de drepte.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există familia $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de drepte (care sunt mulţimi închise) astfel ca

$$\mathbb{R}^2 = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} L_n.$$

Deoarece $\mathbb{R}^2$ este o mulţime nevidă şi deschisă, rezultă, în conformitate cu teorema lui Baire, că există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca L_{n_0} să conţină o mulţime nevidă şi deschisă, ceea ce nu este adevărat.

$\mathbb{Q}$ este o reuniune numărabilă de mulţimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulţimi nu conţine o mulţime deschisă nevidă. Vom arăta că $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu are această proprietate.

Corolar. *Nu există nici o familie cel mult numărabilă de mulţimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulţimi nu conţine o mulţime deschisă nevidă şi astfel ca $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ să fie reuniunea mulţimilor din această familie.*

Demonstraţie. Presupunând contrariul şi având în vedere observaţia precedentă, ar rezulta că există o familie cel mult numărabilă de mulţimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulţimi nu conţine o mulţime deschisă nevidă şi astfel ca $\mathbb{R}$ să fie reuniunea mulţimilor din această familie. Acest fapt contrazice teorema lui Baire.

Exerciţii

1. Dacă submulţimea A a lui $\mathbb{R}^n$ nu conţine o mulţime nevidă deschisă (din $\mathbb{R}^n$), este posibil ca $\overline{A}$ să conţină o mulţime nevidă deschisă (din $\mathbb{R}^n$)?

2. Dacă submulţimea B a lui $\mathbb{R}^n$ conţine o mulţime nevidă închisă (din $\mathbb{R}^n$), trebuie ca şi $\overset{\circ}{B}$ să conţină o mulţime nevidă închisă (din $\mathbb{R}^n$)?

3. Nu există o familie cel mult numărabilă de mulţimi deschise a căror intersecţie să fie $\mathbb{Q}$.

4. O submulţimea A a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte densă în $\mathbb{R}^n$ dacă orice punct din $\mathbb{R}^n$ este punct de acumulare pentru A. Arătaţi că A este densă în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

5. Daţi un exemplu de o mulţime deschisă şi de una închisă care este densă în $\mathbb{R}^n$. Sunt unice?

REZUMAT

Fie $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire cu mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ a unei submulţimi compacte K a lui $\mathbb{R}^n$. Atunci există un număr real strict pozitiv λ, astfel ca pentru orice $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \lambda$, există $\alpha_0 \in A$ astfel ca $x, y \in D_{\alpha_0}$.

Fie $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o familie numărabilă de submulţimi închise din $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} H_k$ conţine o mulţime nevidă deschisă. Atunci cel puţin una dintre mulţimile H_k conţine o mulţime nevidă deschisă.

Bibliografie

1. *John C. Oxtoby*, **Measure and Category,** Springer-Verlag, 1971 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

CONVERGENŢĂ

ELEMENTE INTRODUCTIVE DESPRE ŞIRURI

Şirul a_1, a_2, ..., a_n, ... are limita a, când n tinde spre infinit, dacă oricărui număr pozitiv ε, oricât de mic, i se poate asocia un întreg N (care depinde de ε), astfel încât $|a - a_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$. Aceasta este formularea abstractă a noţiunii de limită a unui şir. Nu este de mirare faptul că la prima confruntare cu acestă noţiune, ea nu poate fi înţeleasă în câteva minute. Există o atitudine nefericită, aproape snoabă, din partea unor autori de manuale, care prezintă cititorului această definiţie fără o pregătire prealabilă, ca şi cum explicarea nu ar fi de demnitatea unui matematician.

Definiţia sugerează o întrecere între două persoane, A şi B. Persoana A pretinde ca o cantitate fixată a să fie aproximată prin a_n cu o precizie mai mare decât o margine aleasă $\varepsilon = \varepsilon_1$; B satisface pretenţia, demonstrând că există un întreg $N = N_1$, astfel încât toţi termenii a_n, care urmează după elementul a_{N_1}, satisfac această condiţie. Atunci A poate deveni mai exigent şi va fixa o nouă margine mai mică, $\varepsilon = \varepsilon_2$. B satisface din nou pretenţia lui A, găsing un întreg $N = N_2$ (eventual mult mai mare). Dacă B poate mulţumi pe A, oricât de mică ar fi marginea aleasă de A, atunci avem situaţia exprimată de $a_n \to a$.

Există o anumită dificultate psihologică în înţelegerea acestei definiţii precise a limitei. Intuiţia noastră ne sugerează o idee "dinamică" despre noţiunea de limită, ca rezultat al unui proces de "mişcare": ne deplasăm în lungul şirului de întregi $1, 2, 3, ..., n, ...$ şi atunci observăm comportarea şirului a_n. Ni se pare că am putea observa faptul că $a_n \to a$. Însă acestă atitudine "naturală" nu este capabilă de o formulare matematică, riguroasă. Pentru a ajunge la o definiţie precisă, trebuie să inversăm ordinea paşilor; în loc de a privi mai întâi la variabila independentă n şi apoi la variabila dependentă a_n, trebuie să ne bazăm definiţia noastră pe ceea ce trebuie să facem dacă vrem să verificăm afirmaţia că $a_n \to a$. Printr-un astfel de procedeu, trebuie să alegem mai întâi o mică margine arbitrară în jurul lui a şi apoi trebuie să stabilim dacă putem satisface această condiţie, luând variabila independentă n suficient de mare. Apoi, dând denumiri simbolice, ε şi N frazelor "margine arbitrar de mică" şi "n suficient de mare", suntem conduşi la definiţia precisă a limitei (Ce este matematica?, de R. Courant şi H. Robbins, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pagina 309).

Noţiunea de şir
Operaţii algebrice cu şiruri din $\mathbb{R}^p$
Limita unui şir din $\mathbb{R}^p$
Şiruri convergente şi divergente din $\mathbb{R}^p$
Mărginirea şirurilor convergente din $\mathbb{R}^p$
Reducerea studiului convergenţei unui şir din $\mathbb{R}^p$ la convergenţa a p şiruri din $\mathbb{R}$
Noţiunea de subşir al unui şir din $\mathbb{R}^p$
Condiţii echivalente pentru divergenţa şirurilor din $\mathbb{R}^p$
Comportamentul şirurilor convergente din $\mathbb{R}^p$ la operaţiile algebrice
Trecerea la limită în inegalităţi pentru şiruri din $\mathbb{R}^p$
Marginile unei submulţimi mărginite a lui $\mathbb{R}$ sunt limitele unor şiruri de elemente din mulţimea respectivă

Studiul şirurilor de elemente din $\mathbb{R}^p$ s-a impus datorită apariţiei în manevrarea multor obiecte a unor scheme de aproximare care se realizează cu ajutorul unor procese iterative (spre exemplu metoda coardei a lui Newton, determinarea soluţiilor unor sisteme cu ajutorul principiului contracţiilor etc).

Noţiunea de şir

Definiţie. *Fie M o mulţime. Un şir din M este o funcţie cu domeniul $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$, unde $k \in \mathbb{N}$) şi codomeniul o submulţime a lui M.*

Observaţie. *Dacă $x : \mathbb{N} \to M$ este un şir, valoarea lui x în n se va nota x_n (în loc de $x(n)$), iar funcţia $x : \mathbb{N} \to M$ se va nota $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Operaţii algebrice cu şiruri din $\mathbb{R}^p$

Definiţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri din $\mathbb{R}^p$, atunci definim suma lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diferenţa lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar produsul lor scalar ca fiind şirul, din $\mathbb{R}$, $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definiţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}$, iar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}^p$, atunci definim produsul lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* $\mathbb{R}^p$*, iar* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir din* $\mathbb{R}$ *astfel ca, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*, să avem* $y_n \neq 0$*, atunci definim câtul lor ca fiind şirul, din* $\mathbb{R}^p$*,* $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Limita unui şir din $\mathbb{R}^p$. Şiruri convergente şi divergente din $\mathbb{R}^p$

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* $\mathbb{R}^p$*, un element* $x \in \mathbb{R}^p$*, se numeşte o limită a lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dacă pentru orice vecinătate* V *a lui* x*, există* $n_V \in \mathbb{N}$*, astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ *să avem*

$$x_n \in V.$$

Vom spune că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* x*.*

Dacă un şir, din $\mathbb{R}^p$*, are o limită din* $\mathbb{R}^p$*, vom spune că el este convergent, iar în caz contrar îl vom numi divergent.*

Observaţie. *Definiţia de mai sus are sens şi pentru şiruri cu elemente dintr-un spaţiu topologic.*

Teoremă. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* $\mathbb{R}^p$*, un element* $x \in \mathbb{R}^p$ *este o limita a sa dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$*, astfel ca, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ *să avem*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Observaţie. *Pentru suportul intuitiv al noţiunii de limită a unui şir se poate consulta [3], pagina 219.*

Teorema de unicitate a limitei. *Un şir din* $\mathbb{R}^n$ *nu poate avea mai mult de o limită.*

Observaţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* $\mathbb{R}^p$ *care are limita* $x \in \mathbb{R}^p$*, atunci vom scrie*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

sau

$$\lim x_n = x$$

sau

$$x_n \to x.$$

Mărginirea şirurilor convergente din $\mathbb{R}^p$

Propoziţie. *Un şir convergent din $\mathbb{R}^n$ este mărginit (i.e. dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent din $\mathbb{R}^p$, atunci există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\|x_n\| < M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).*

Reducerea studiului convergenţei unui şir din $\mathbb{R}^p$ la convergenţa a p şiruri din $\mathbb{R}$

Următorul rezultat arată că studiul convergenţei unui şir din $\mathbb{R}^n$ se reduce la studiul convergenţei unor şiruri din $\mathbb{R}$.

Teoremă. *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$x_n = (\zeta_{1n}, \zeta_{2n}, ..., \zeta_{pn}),$$

converge către un element

$$y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_p) \in \mathbb{R}^p$$

dacă şi numai dacă şirul $(\zeta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, converge către η_i, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_n - y\| < \varepsilon.$$

Dar, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$,

$$|\zeta_{in} - \eta_i| \leq \|x_n - y\|,$$

fapt care arată că, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, şirul $(\zeta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, converge către η_i.

"$\Leftarrow$" Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|\zeta_{in} - \eta_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}},$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_n - y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} |\zeta_{in} - \eta_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

adică şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către y.

Noţiunea de subşir al unui şir din $\mathbb{R}^p$

Definiţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$, iar $k_1 < k_2 < ... < k_n <$ ... un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul, din $\mathbb{R}^p$, dat de $(x_{k_n})_{k\in\mathbb{N}}$, se numeşte un subşir al său.*

Observaţie. *Fie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie strict crescătoare. Atunci k defineşte un subşir al lui $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prin $x \circ k$ şi orice subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poate fi definit în acest mod.*

Propoziţie. *Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $x \in \mathbb{R}^p$, atunci orice subşir al său converge către x.*

Corolar. *Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $x \in \mathbb{R}^p$, iar $m \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x.*

Condiţii echivalente pentru divergenţa şirurilor din $\mathbb{R}^p$

Următorul rezultat descrie situaţia în care un şir nu converge către x.

Propoziţie. *Dat fiind şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, şi $x \in \mathbb{R}^p$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge către x.

ii) există o vecinătate V a lui x, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n > n$, astfel încât

$$x_{m_n} \notin V.$$

iii) există o vecinătate V a lui x şi un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât nici unul dintre elementele subşirului nu se află în V.

Comportamentul şirurilor convergente din $\mathbb{R}^p$ la operaţiile algebrice

Propoziţie

i) Fie şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergente către x, respectiv y.

Atunci şirurile $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converg către $x + y$, $x - y$ şi respectiv $x \cdot y$.

ii) Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, convergent către $y \in \mathbb{R}$.

Atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $xy \in \mathbb{R}^p$.

iii) Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^*$, convergent către $y \in \mathbb{R}^*$.

Atunci şirul $(\frac{1}{y_n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $\frac{1}{y}x \in \mathbb{R}^p$.

Trecerea la limită în inegalităţi pentru şiruri din $\mathbb{R}^p$

Propoziţie. *Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$. Dacă există $c \in \mathbb{R}^p$ şi $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca*

$$\|x_n - c\| \leq r,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\|x - c\| \leq r.$$

Demonstraţie. Mulţimea

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - c\| > r\}$$

este deschisă.

Dacă $x \in V$, atunci V este o vecinătate a lui x, deci există $n_V \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ să avem

$$x_n \in V,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare

$$x \notin V,$$

adică

$$\|x - c\| \leq r.$$

Marginile unei submulţimi mărginite a lui $\mathbb{R}$ sunt limitele unor şiruri de elemente din mulţimea respectivă

Propoziţie. *Fie A o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}$. Atunci există două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din A astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf A$$

şi
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup A.$$

Demonstraţie. Conform definiţiei marginii superioare a unei mulţimi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $y_n \in A$, astfel încât

$$\sup A - \frac{1}{n} < y_n \leq \sup A.$$

Prin urmare, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup A - \frac{1}{n}) = \sup A$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup A.$$

Analog se găseşte un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din A cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf A.$$

Observaţie. *De fapt are loc un fenomen mai general, anume dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^P$ şi $a \in \overline{A}$, atunci există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din A astfel încât*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Exerciţii

1. Fie şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, convergente, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem
$$x_n \leq y_n.$$

Atunci
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Mai general, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sunt trei şiruri din $\mathbb{R}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

atunci, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi
$$\lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

2. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, are limita $x \in \mathbb{R}$, atunci şirul $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $|x|$.

3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4. Fie $p \in \mathbb{Z}$ şi $a \in (-1,1)$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0.$$

5. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $(0,\infty)$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

6. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $(0,\infty)$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1.$$

Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

7. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $(0,\infty)$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

8. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $(0,\infty)$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} > 1$.
Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $0 < b \leq a$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

10. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\}$$

11. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$ şi $\alpha \in (0,\infty)$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1$$

şi, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, avem

$$|x_n + x_n| \geq \alpha.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să se precizeze posibilele valori ale limitei lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12. Să se arate că dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea că există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât orice subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al său are un subşir $(x_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ care converge către l, atunci el este convergent către l.

13. Să se arate că dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea că există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât subşirurile $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converg către l, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către l.

14. Să se caracterizeze şirurile convergente de numere întregi.

15. Fie $x_1 \in \mathbb{R}$ şi

$$x_{n+1} = \left|x_n - 2^{1-n}\right|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

REZUMAT

Fie M o mulţime. Un şir din M este o funcţie cu domeniul $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$, unde $k \in \mathbb{N}$) şi codomeniul o submulţime a lui M.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri din $\mathbb{R}^p$, atunci definim suma lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diferenţa lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar produsul lor scalar ca fiind şirul, din $\mathbb{R}$, $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}$, iar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}^p$, atunci definim produsul lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$, iar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem $y_n \neq 0$, atunci definim câtul lor ca fiind şirul, din $\mathbb{R}^p$, $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$, un element $x \in \mathbb{R}^p$, se numeşte o limită a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui x, există $n_V \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ să avem $x_n \in V$. Vom spune în acest caz că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x. Dacă un şir, din $\mathbb{R}^p$, are o limită din $\mathbb{R}^p$, vom spune că el este convergent, iar în caz contrar îl vom numi divergent.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$, un element $x \in \mathbb{R}^p$ este o limita a sa dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Un şir din $\mathbb{R}^n$ nu poate avea mai mult de o limită.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$ care are limita $x \in \mathbb{R}^p$, atunci vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $\lim x_n = x$ sau $x_n \to x$.

Un şir convergent din $\mathbb{R}^p$ este mărginit (i.e. dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent din $\mathbb{R}^p$, atunci există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\|x_n\| < M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $x_n = (\zeta_{1n}, \zeta_{2n}, ..., \zeta_{pn})$, converge către un element $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_p) \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă şirul $(\zeta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, converge către η_i, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^p$, iar $k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$ un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul, din $\mathbb{R}^p$, dat de $(x_{k_n})_{k\in\mathbb{N}}$, se numeşte un subşir al său. Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $x \in \mathbb{R}^p$, atunci orice subşir al său converge către x.

Dat fiind şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, şi $x \in \mathbb{R}^p$, următoarele afirmaţii sunt echivalente: i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge către x; ii) există o vecinătate V a lui x, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n > n$, astfel încât $x_{m_n} \notin V$; iii) există o vecinătate V a lui x şi un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât nici unul dintre elementele subşirului nu se află în V.

Fie şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergente către x, respectiv y. Atunci şirurile $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converg către $x + y$, $x - y$ şi respectiv $x \cdot y$.

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, convergent către $y \in \mathbb{R}$. Atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $xy \in \mathbb{R}^p$.

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^*$, convergent către $y \in \mathbb{R}^*$. Atunci şirul $(\frac{1}{y_n} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, converge către $\frac{1}{y} x \in \mathbb{R}^p$.

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, convergent către $x \in \mathbb{R}^p$. Dacă există $c \in \mathbb{R}^p$ şi $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca $\|x_n - c\| \leq r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\|x - c\| \leq r$.

Fie A o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}$. Atunci există două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup A$.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, Americam Mathematical Society, 2000

3. *Solomon Marcus*, **Şocul matematicii**, Editura Albatros, Bucureşti, 1987 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II33883

CRITERII DE CONVERGENŢĂ PENTRU ŞIRURI

Teorema convergenţei monotone
Criteriul lui Cauchy

Pentru a arăta, cu metodele prezentate până acum, că un şir este convergent, trebuie să cunoaştem sau să intuim care este limita şirului. De multe ori, acest lucru nu este uşor de realizat. Rezultatele următoare vor elimina (parţial) acest neajuns.

Teorema de mai jos se va folosi, spre exemplu, în cadrul demonstraţiei teoremei referitoare la metoda lui Newton (vezi pagina), teoremei de reprezentare a lui Riesz (vezi pagina), precum şi cadrul demonstraţiei formulei lui Stirling (vezi pagina).

Teorema convergenţei monotone. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale care este crescător (i.e. $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).*

Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este mărginit, caz în care

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Am văzut acest rezultat în secţiunea precedentă.

Mai mult, fie

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, să avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon,$$

de unde, având în vedere că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător, deducem

$$l - \varepsilon \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq l + \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\left| \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n - \lim_{n\to\infty} x_n \right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

"$\Leftarrow$" Există

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \overset{not}{=} l.$$

Atunci

$$x_n \leq l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mai mult, având în vedere definiţia supremumului, pentru orice $\varepsilon > 0$, există x_{n_ε} astfel ca

$$l - \varepsilon < x_{n_\varepsilon},$$

de unde, deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător, deducem că

$$l - \varepsilon < x_n \leq l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, adică

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Corolar. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale care este descrescător (i.e. $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).*

Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este mărginit, caz în care

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Criteriul lui Cauchy

Teorema de mai sus este un instrument extraordinar de util, dar are inconvenientul că se aplică numai pentru şiruri monotone. Am dori, ca atare, un alt criteriu care să implice convergenţa, chiar dacă şirul nu este monoton. Acesta este criteriul lui Cauchy, un criteriu foarte des utilizat (vezi, spre exemplu, Teorema punctelor fixe pentru contracţii).

Pentru început vom prezenta o forma a teoremei Bolzano-Weierstrass specializată pentru şiruri, rezultat care va fi folosit şi în cadrul demonstraţiei teoremei de permanenţă a funcţiilor continue.

Lema lui Cesaro. *Un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$ are (cel puţin) un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$.

Dacă există numai un număr finit de valori distincte pentru elementele şirului, atunci cel puţin una dintre aceste valori se repetă de o infinitate de ori, şi, prin urmare, putem obţine un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alegând această valoare de fiecare dată când ea apare.

Dacă există un număr infinit de valori distincte pentru elementele şirului, cum mulţimea termenilor şirului este mărginită, conform teoremei Bolzano-Weierstrass, există un punct de acumulare, $l \in \mathbb{R}^p$, al mulţimii termenilor şirului.

Fie x_{n_1} un element al şirului astfel ca

$$\|x_{n_1} - l\| < 1.$$

Cum l este punct de acumulare pentru mulţimea

$$S_1 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

l este punct de acumulare şi pentru mulţimea

$$S_2 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N},\, n > n_1\}.$$

Prin urmare, există un $x_{n_2} \in S_2$ (deci $n_2 > n_1$) astfel încât

$$\|x_{n_2} - l\| < \frac{1}{2}.$$

Continuând în acest mod, găsim un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât

$$\|x_{n_k} - l\| < \frac{1}{k},$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deci

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

Definiţie. *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem*

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Observaţie. *Spre deosebire de definiţia şirului convergent care cuprinde elemente "exterioare" şirului considerat (anume limita acestuia), definiţia şirului Cauchy are avantajul de a implica numai elementele şirului dat; prin urmare, dezavantajul "ghicirii" valorii limitei unui şir pentru testarea convergenţei acestuia cu ajutorul definiţiei şirului convergent nu este prezent în definiţia şirului Cauchy.*

Lemă. *Un şir convergent* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, din* $\mathbb{R}^p$*, este şir Cauchy.*

Lemă. *Un şir Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, din* $\mathbb{R}^p$*, este mărginit.*

Lemă. *Un şir Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, din* $\mathbb{R}^p$*, care are un subşir convergent, este convergent.*

Demonstraţie. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Dacă subşirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge către $l \in \mathbb{R}^p$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, cu următoarele proprietăţi:

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$$

şi

$$\left\|x_{n_{k_\varepsilon}} - l\right\| < \varepsilon.$$

Fie n orice număr natural astfel ca $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci

$$\|x_n - l\| \leq \left\|x_{n_{k_\varepsilon}} - l\right\| + \left\|x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}\right\| < 2\varepsilon.$$

Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către l.

Criteriul lui Cauchy. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, din* $\mathbb{R}^p$*, este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy.*

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Vezi una dintre lemele de mai sus.

"$\Leftarrow$" Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, este Cauchy, atunci, aşa cum am văzut mai sus, este mărginit. Conform lemei lui Cesaro, el are un subşir convergent. Lema de mai sus implică faptul că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Observaţie. *Importanţa criteriului lui Cauchy rezidă în posibilitatea testării convergenţei fără a se face apel la elemente exterioare mulţimii termenilor şirului.*

Exerciţii

1. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,$$

pentru orice $\alpha\in(0,\infty)$.

2. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}a^{n}=0,$$

pentru orice $\alpha\in(-1,1)$.

3. Fie $\alpha\in(0,\infty)$. Să se arate că şirul dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{\alpha}{x_n}),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde $x_1\in(0,\infty)$, este convegrent şi

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}.$$

4. Fie $\alpha,\beta\in[0,1]$,

$$x_1=\alpha\beta$$

şi

$$x_{n+1}=(\alpha-x_n)(\beta-x_n)+x_n,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, este mărginit şi

$$x_{n+1}\geq x_n-\frac{1}{2^{n}},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci el este convergent.

6. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, este mărginit şi

$$x_{n+1}\geq x_n-\frac{1}{n^{2}},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci el este convergent.

7. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, este mărginit şi

$$x_{n+1}\sqrt[2^n]{2}\geq x_n,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci el este convergent.

8. Să se arate că dacă şirul mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, satisface inegalitatea

$$x_{n+2}\leq\frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{2}{3}x_n,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci el este convergent.

9. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, dat de

$$x_n=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n!},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

10. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, dat de

$$x_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

11. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, dat de $x_1=1$, $x_2=2$, ...,

$$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

12. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$, are proprietatea că există $\lambda\in(0,1)$ astfel încât

$$\left|x_{n+1}-x_{n+2}\right|<\lambda\left|x_n-x_{n+1}\right|,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci el este convergent.

13. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $(0,\infty)$, are proprietatea că

$$x_{n+1}\leq\frac{1}{S_{n+1}}((S_n-1)x_n+x_{n-1}),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde $S_n=x_1+x_2+...+x_n$, atunci el este convergent şi să se afle limita sa.

REZUMAT

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale care este crescător (i.e. $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$). Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este mărginit, caz în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$ are un subşir convergent.

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Un şir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, este şir Cauchy.

Un şir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, este mărginit.

Un şir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, care are un subşir convergent, este convergent.

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}^p$, este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000

ŞIRURI DE FUNCŢII

Convergenţă simplă şi uniformă pentru şiruri de funcţii
Caracterizarea convergenţei uniforme cu ajutorul $\|.\|_\infty$
Criteriul lui Cauchy pentru convergenţă uniformă

Convergenţă simplă şi uniformă pentru şiruri de funcţii

De multe ori, suntem confruntaţi cu un fenomen f care nu poate fi evaluat în mod nemijlocit, dar care este prezentat ca limita unui şir de alte fenomene f_n care pot fi controlate. Apare astfel, în mod natural, noţiunea de convergenţă simplă pentru şiruri de funcţii

Definiţie. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplu), pe D_0, către f, şi vom nota

$$f_n \overset{s}{\to} f\ ,$$

dacă, pentru orice $x \in D_0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

i.e.

pentru orice $x \in D_0$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{x,\varepsilon}$,

avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Exemple

1. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

2. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

3. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

4. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

5. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x}{n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{array} \right.,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

6. Să se studieze convergenţa simplă a şirului de funcţii, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Observaţie. *Suntem interesaţi în a studia în ce măsură proprietăţile funcţiilor f_n se transmit la funcţia f. Aşa cum arată exemplul 2 de mai sus (unde deşi funcţiile f_n sunt continue, funcţia limită nu are această proprietate), convergenţa simplă nu este instrumentul adecvat acestui scop. O analiză geometrică a exemplului de mai sus arată că motivul discontinuităţii funcţiei limită în 1 este faptul că, pe măsură ce n creşte, graficul lui f_n se depărtează de graficul lui f în apropierea lui 1. Prin urmare avem nevoie de o nouă noţiune de convergenţă pentru şiruri de funcţii, convergenţă care să oblige "graficul lui f_n să conveargă către graficul lui f".*

Definiţie. *Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe D_0, către f, şi vom nota

$$f_n \xrightarrow{u} f,$$

dacă

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi orice $x \in D_0$,

avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observaţie. *În cazul în care $p = q = 1$, $f_n \xrightarrow{u} f$ înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem*

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D_0$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{x,\varepsilon}$, graficul lui f_n se află între $G_{f-\varepsilon}$ şi $G_{f+\varepsilon}$, adică "graficul lui f_n converge către graficul lui f".

Observaţie. *Vom vedea că noţiunea de convergenţă uniformă pentru şiruri de funcţii este cea care permite transferul proprietăţilor lui f_n la f, în particular, permite permutarea limitei cu derivata şi cu integrala. De asemenea, ea ne permite construcţia unor obiecte matematice foarte "exotice", ca de exemplu funcţii din $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ care sunt continue dar sunt nederivabile în orice punct al lui $\mathbb{R}$, curbe a căror imagine umple un pătrat etc.*

Observaţie. *Din păcate, fenomenul convergenţei uniforme nu apare în situaţiile întâlnite de către fizicieni atât de des pe cât ar dori-o ei. Din acest motiv, în cadrul teoriei integralei Riemann, permutarea limitei cu integrala are loc într-un cadru prea restrâns în raport cu nevoile impuse de fizică. Acesta constituie unul dintre motivele care au condus la elaborarea teoriei integralei Lebesgue.*

Lema următoare furnizează o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un şir de funcţii să nu conveargă uniform.

Lemă. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

Atunci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge uniform, pe D_0, către f, dacă şi numai dacă există $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, un subşir $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elemente din D_0, astfel încât

$$\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemple-Exerciţii. Să studieze convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii prezentate mai sus.

Caracterizarea convergenţei uniforme cu ajutorul $\|.\|_\infty$

Definiţie. *Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie mărginită, definim norma lui f prin*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} \|f(x)\| .$$

Exerciţiu. Să se arate că $\|.\|_\infty$ verifică proprietăţile normei.

Propoziţie. *Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, converge uniform, pe D_0, către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Exerciţiu. Să se aplice această propoziţie pe exemplele de mai sus.

Criteriul lui Cauchy pentru convergenţă uniformă

Ca şi în cazul şirurilor de numere reale, prezentăm un criteriu de tip Cauchy (care va fi folosit, spre exemplu, în cadrul demonstraţiei teoremei lui Tietze).

Criteriul lui Cauchy pentru convergenţă uniformă. *Fie şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

Atunci există $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel încât $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe D, către f, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Exerciţii.

1. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă pentru următoarele şiruri de funcţii:

i) $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [-1, 1]$.

ii) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [-1, 1]$.

iii) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{x + n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0, \infty)$.

iv) $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{x + n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [a, b]$, unde $0 < a < b$.

Observaţie. *Exerciţiile iii) şi iv) arată că este important să precizăm pe ce mulţime studiem convergenţa uniformă.*

v) $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in (-1, 1)$.

2. Fie $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii care converge uniform către $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se arate că şirul de funcţii $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge uniform.

REZUMAT

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe D_0, către f, şi vom nota $f_n \xrightarrow{u} f$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi orice $x \in D_0$, avem $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie mărginită, definim norma lui f prin $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in D} |f(x)|$.

Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, converge uniform, pe D_0, către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *Ion Colojoară, Radu Miculescu, Cristinel Mortici*, **Analiză Matematică, Teorie. Metode. Aplicaţii**, Editura Art, Bucureşti, 2002, - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39681

3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000

4. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme,** Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23777

LIMITA SUPERIOARĂ ŞI INFERIOARĂ A UNUI ŞIR

Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale
Caracterizarea convergenţei şirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară şi inferioară

În această secţiune vom introduce noţiunile de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale care sunt utile pentru "clasificarea" şirurilor divergente.

Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale

Supremumul unei submulţimi S a lui $\mathbb{R}$ poate fi descris ca fiind infimumul mulţimii acelor numere reale ce sunt mai mari decât orice element al lui S.

Este util să se relaxeze această condiţie şi să considere infimumul mulţimii acelor numere reale pentru care există numai un număr finit de elemente ale lui S mai mari decât ele.

Din mai multe motive, în cazul şirurilor de numere reale este important să se considere o uşoară modificare a acestui concept. Într-adevăr, un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de numere reale, furnizează o submulţime a lui $\mathbb{R}$, dar şirul posedă o structură suplimentară prin faptul că elementele sale sunt indexate după $\mathbb{N}$, deci avem aici o ordonare, care nu este prezentă în cazul unei mulţimi arbitrare de numere reale. Ca urmare, acelaşi număr poate să apară de mai multe ori în mulţimea termenilor şirului, fenomen ce nu este prezent pentru mulţimi arbitrare de numere reale. Suntem conduşi astfel la următoarea

Definiţie. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale mărginit superior. Atunci limita superioară a sa, notată*

$$lim\ sup\ x_n$$

sau

$$\overline{\lim}\ x_n,$$

este infimumul mulţimii numerelor reale v, cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât

$$v < x_n.$$

Similar, fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale mărginit inferior. Atunci limita inferioară a sa, notată

$$\text{lim inf } x_n$$

sau

$$\underline{\lim} x_n,$$

este supremumul mulţimii numerelor reale v, cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n, astfel încât

$$v > x_n.$$

Observaţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale mărginit, atunci limita superioară şi limita inferioară există şi sunt unice.*

Observaţie. *Unii autori folosesc notaţia lim sup $x_n = \infty$ pentru a marca faptul că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de numere reale, este nemărginit superior, respectiv notaţia lim inf $x_n = -\infty$ pentru a marca faptul că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de numere reale, este nemărginit inferior.*

Există şi alte moduri de a caracteriza limita superioară a unui şir de numere reale. Anume avem:

Propoziţie. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale mărginit superior şi $l^* \in \mathbb{R}$.*

Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i)

$$l^* = \text{lim sup } x_n.$$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr finit de numere naturale n astfel încât

$$l^* + \varepsilon < x_n,$$

dar există un număr infinit de numere naturale n astfel încât

$$l^* - \varepsilon < x_n.$$

iii)

$$l^* = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n.$$

iv)

$$l^* = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n.$$

v)

$$l^* = \sup\{x\in\mathbb{R} \mid \textit{există un subşir } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \textit{ al lui } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \textit{ astfel ca } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x\}.$$

Observaţie. *Mulţimea*

$$\{x\in\mathbb{R} \mid \text{există un subşir } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ al lui } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ astfel ca } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x\}$$

care poartă numele de mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ne dă, prin "bogăţia" elementelor sale, o măsură asupra "gradului" de divergenţă al unui şir, anume, cu cât această mulţime are mai multe elemente, cu atât şirul în cauză este "mai divergent".*

Exerciţiu. Formulaţi şi demonstraţi propoziţia analoagă pentru limita inferioară.

Caracterizarea convergenţei şirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară şi inferioară

Teoremă. *Un şir de numere reale mărginit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă*

$$\textit{lim inf } x_n = \textit{lim sup } x_n,$$

caz în care limita şirului este această valoare comună.

Demonstraţie.

"⇒" Fie

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon.$$

Ultima inegalitate arată că

$$\textit{lim sup } x_n \leq l + \varepsilon$$

iar prima că

$$l - \varepsilon \leq \textit{lim inf}\ x_n.$$

Prin urmare

$$\textit{lim sup}\ x_n - \textit{lim inf}\ x_n \leq 2\varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\textit{lim inf}\ x_n = \textit{lim sup}\ x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$"\Leftarrow"$ Fie

$$l = \textit{lim inf}\ x_n = \textit{lim sup}\ x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$, avem

$$x_n \leq l + \varepsilon$$

şi există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^2$, avem

$$l - \varepsilon \leq x_n.$$

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon,$$

deci

$$l = \textit{lim inf}\ x_n = \textit{lim sup}\ x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Observaţie. *Teorema de mai sus subliniază modul în care noţiunile de limită superioară şi inferioară contribuie la clasificarea şirurilor divergente prin evaluarea distanţei dintre limita inferioară şi cea superioară, anume cu cât distanţa dintre lim inf* x_n*şi lim sup* x_n *este mai mare, cu atât şirul în cauză este "mai divergent".*

Exerciţii.

1. Să se determine lim inf x_n şi lim sup x_n pentru:

i)

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{1 + n^{(-1)^n}} + \sin\frac{n\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

ii)

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iii)

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n[\frac{1}{2} + (-1)^n] + \cos\frac{n\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iv)

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale mărginite.

Să se arate că:

a)

$$\lim\inf x_n \leq \lim\sup x_n.$$

b) dacă $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, atunci

$$\lim\inf cx_n = c \lim\inf lx_n$$

şi

$$\lim\sup cx_n = c \lim\sup x_n.$$

b$^{'}$) dacă $c \in \mathbb{R}$, $c \leq 0$, atunci

$$\lim\inf cx_n = c \lim\sup x_n$$

şi

$$\lim\sup cx_n = c \lim\inf x_n.$$

c)

$$\lim\inf x_n + \lim\inf y_n \leq \lim\inf (x_n + y_n).$$

d)

$$\lim\sup (x_n + y_n) \leq \lim\sup x_n + \lim\sup y_n.$$

e) dacă

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim\inf x_n \leq \lim\inf y_n$$

şi
$$\limsup x_n \leq \limsup y_n.$$

Observaţie. În general, inegalităţile de mai sus sunt stricte.

A se studia cazul
$$x_n = (-1)^n$$
şi
$$y_n = (-1)^{n+1},$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Pentru un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că
$$\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

În particular, dacă şirul $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, atunci şi şirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

4. Pentru un şir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale pozitive, să se arate că
$$\underline{\lim}(2 - x_{n+1})x_n \leq 1.$$

5. Pentru un şir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem
$$x_n - x_{n+p} < \varepsilon,$$
să se arate că şirul considerat este convergent.

6. Pentru un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că
$$\overline{\lim}\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n}{x_n} \geq 4.$$

Să se arate că există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive pentru care $\overline{\lim}\frac{x_1+x_2+....+x_{n-1}+x_n}{x_n} = 4$.

7. Pentru un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că
$$\overline{\lim}\ n(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1) \geq 1.$$

Să se arate că există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive pentru care $\overline{\lim}\ n(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1) = 1$.

7. Fie un şir crescător $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive care are proprietatea că

$$x_{nm} \geq n x_m,$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$.

Să se arate că dacă $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n} < \infty$, atunci şirul $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

8. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde x_1, $x_2 \in (0, \infty)$, este convergent.

REZUMAT

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale mărginit superior. Atunci limita superioară a sa, notată lim sup x_n sau $\overline{\lim}\ x_n$, este infimumul mulţimii numerelor reale v, cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât $v < x_n$.

Un şir de numere reale mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă lim inf x_n =lim sup x_n, caz în care limita şirului este această valoare comună.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară, Radu Miculescu, Cristinel Mortici*, **Analiză Matematică, Teorie. Metode. Aplicaţii**, Editura Art, Bucureşti, 2002, - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39681

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, Americam Mathematical Society, 2000

4. *Gh. Sireţchi,* **Calcul Diferenţial şi Integral, vol. 1, noţiuni fundamentale***,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985, - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II32924

METODA LUI CESÀRO DE SUMARE

Şirul mediilor aritmetice ale unui şir de numere reale
Noţiunea de şir Cesàro sumabil
Convergenţa implică convergenţa în sensul lui Cesàro

Vom prezenta în această secţiune un alt instrument care permite "manipularea" şirurilor divergente, instrument care se va dovedi util în studiul seriilor Fourier.

Şirul mediilor aritmetice ale unui şir de numere reale
Noţiunea de şir Cesàro sumabil

Chiar dacă un şir nu este convergent, este posibil să i se ataşeze o "limită generalizată".

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$*, atunci şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definit de*

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*, se numeşte şirul mediilor aritmetice ale lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Observaţie. *Deoarece considerarea mediei aritmetice tinde să netezească eventualele fluctuaţii ale lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ne aşteptăm ca şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *să aibă mai multe şanse de convergenţă decât şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Definiţie. *În condiţiile de mai sus, dacă şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* y*, spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este Cesàro sumabil către* y *(sau că* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este Cesàro convergent).*

Observaţie. *Conceptul de sumabilitate Cesàro se va dovedi util în cadrul teoriei seriilor Fourier, mai precis în cadrul teoremei lui Fejér.*

Notă istorică. *Ernesto Cesàro* (1859-1906) s-a născut la Napoli, Italia. Tatăl său a fost printre primii fermieri italieni care au folosit mecanizarea în agricultură. Cesàro a studiat la Gimnaziul din Napoli şi Nola, precum

şi la Ècole des Mines din Liège, cu Catalan. Acesta l-a ajutat să publice primul său articol de matematică, în 1883. Era primul articol dintr-o serie de nouă având drept subiect teoria numerelor. Cesàro a frecventat, la Sorbona, cursurile predate, printre alţii, de Hermite (care a şi citat în una dintre lucrările sale un rezultat al lui Cesàro) şi Darboux. În urma unui conflict cu unul dintre profesorii săi de la Liège, având şi suportul lui Dini, primeşte o bursă care-i va permite să studieze la Universitatea din Roma. În 1887 obţine titlul de doctor. Dupa o scurtă perioadă ca profesor la un liceu din Roma devine titularul catedrei de matematică de la Universitatea din Palermo, catedră pe care o ocupă până în 1891, an în care devine titularul catedrei de Analiză Matematică de la Universitatea din Napoli. Principalele contribuţii ale lui Cesàro au privit geometria diferenţială. Ele sunt cuprinse în cartea intitulată "Lezione di Geometria intriseca" (1896). Prin lucrările lui privind fizica matematică, a fost unul dintre cei care au răspândit în Europa ideile lui Maxwell (trebuie menţionat că a fost necesar un timp îndelungat pentru ca oamenii de ştiinţă să înţeleagă importanţa acestora). Moartea lui Cesàro s-a produs în circumstanţe tragice, anume în urma încercării de a-şi salva de la înec propriul fiu în vârstă de 17 ani.

Este rezonabil să ne aşteptăm ca limita generalizată a unui şir convergent să fie chiar limita sa.

Convergenţa implică convergenţa în sensul lui Cesàro

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei lui Tauber (vezi pagina).

Teoremă. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente, din $\mathbb{R}^p$, care converge către x, atunci şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x.*

Demonstraţie. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$,

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

De asemenea, există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\|x_n - x\| < M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|S_n - x\| = \frac{\|(x_1 - x) + (x_2 - x) + ... + (x_n - x)\|}{n} \leq$$

$$\leq \frac{\|(x_1 - x) + ... + (x_{n_\varepsilon} - x)\|}{n} + \frac{\|(x_{n_\varepsilon + 1} - x) + ... + (x_n - x)\|}{n} \leq$$

$$\leq n_\varepsilon \frac{M}{n} + \frac{n - n_\varepsilon}{n}\varepsilon.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} n_\varepsilon \frac{M}{n} = 0,$$

există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$n_\varepsilon \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon, n_0\}$, avem

$$\|S_n - x\| < 2\varepsilon,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x.$$

Observaţie. *Una dintre cele mai spectaculoase aplicaţii ale metodei de sumare a lui Cesàro este teorema lui Féjet, care afirmă că o funcţie continuă se determină din seria sa Fourier folosind procesul sumabilităţii Cesàro, deşi nu poate fi determinată întotdeauna din seria sa Fourier folosind convergenţa obişnuită.*

Notă istorică. *Lipót Fejét* (1880-1959) (numele său real este Leopold Weiss) s-a născut la Pécs, Ungaria, în 1880. Între 1897 şi 1902 a studiat matematica şi fizica la Budapesta şi Berlin unde a fost studentul lui Schwarz. Teorema referitoare la teoria seriilor Fourier care-i poartă numele, publicată în 1900, constituie baza tezei sale de doctorat pe care a susţinut-o în 1902 la Budapesta. Între 1902 şi 1905 predă la Universitatea din Budapesta, apoi, între 1905 şi 1911 la Koloszsvár (Cluj), iar din 1911 pînă la moartea sa, în 1959, din nou la Budapesta. Principalul său domeniu de studiu a fost analiza armonică, dar a publicat de asemenea un articol important despre funcţii întregi (împreună cu Carathéodory, în 1907) şi unul despre transformări conforme (împreună cu Riesz, în 1922).

Exerciţii

1. Şirul dat de

$$x_n = 1 + (-1)^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, nu este convergent, dar este Cesàro sumabil către 1, care este cea mai naturală alegere pentru o limită generalizată a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deoarece acest şir are două subşiruri convergente către 0 şi respectiv 2.

2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton de numere reale, care este Cesàro sumabil către $x \in \mathbb{R}$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale convergente către $l \in \mathbb{R}$, respectiv $l^{'} \in \mathbb{R}$.

Atunci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dat de

$$z_n = \frac{x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_n y_0}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergent către $ll^{'}$.

REZUMAT

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, atunci şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $S_n = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se numeşte şirul mediilor aritmetice ale lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către y, spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cesàro sumabil către y (sau că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cesàro convergent).

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente, din $\mathbb{R}^p$, care converge către x, atunci şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

NUMERELE e ŞI γ

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+...+\tfrac{1}{n!})=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n=e$$

e **este iraţional**

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n}-\ln n)=\gamma$$

O sumă de bani S_0, investită cu o dobândă anuală de $r\%$ va genera, după un an, în cazul calculării anuale a dobânzii, o sumă de

$$S_0+rS_0=S_0(1+r).$$

Dacă dobânda este calculată semestrial, după primul semestru suma generată este de

$$S_0+\frac{r}{2}S_0=S_0(1+\frac{r}{2}),$$

iar după un an este de

$$S_0(1+\frac{r}{2})+S_0(1+\frac{r}{2})\frac{r}{2}=S_0(1+\frac{r}{2})^2,$$

sumă mai mare decât cea acumulată în cazul calculului anual al dobânzii, deoarece, în acest al doilea caz, dobânda acumulată în primul semestru se va constitui într-o nouă sumă care, la rândul ei, va genera dobândă în cel de al doilea semestru.

În cazul în care dobânda este calculată este calculată de n ori pe an, suma generată după un an este

$$S_0(1+\frac{r}{n})^n.$$

Cu cât n este mai mare, cu atât investiţia este mai profitabilă.

Suma maximă ce se poate obţine după un an este

$$S_0\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n.$$

Aşadar, în mod natural suntem conduşi la studiul limitei şirului

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

Aceasta este şi motivul pentru care limita şirului descris mai sus poartă numele de baza logaritmului natural.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+...+\tfrac{1}{n!})=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n=e$$

Propoziţie. *Şirurile*

$$((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

şi

$$(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$$

sunt convergente şi au aceeaşi limită notată cu e.

Demonstraţie. Conform cu inegalitatea mediilor, avem

$$((1+\frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

i.e.

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare şirul, de termen general $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

Să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ şi orice $k \in \{1, ..., n\}$ este valabilă inegalitatea

$$C_n^k \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!},$$

deci

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} <$$

$$< 1+\frac{1}{1!}+(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}) =$$

$$= 2+(1-\frac{1}{n}) = 3-\frac{1}{n} < 3,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, deci şirul de termen general $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior.

Prin urmare şirul de termen general $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Fie

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

După cum am observat mai sus, avem

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 2$, avem

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1 + C_m^1 \frac{1}{m} + ... + C_m^n \frac{1}{m^n} + C_m^{n+1} \frac{1}{m^{n+1}} + ... + C_m^m \frac{1}{m^m},$$

deci

$$1 + C_m^1 \frac{1}{m} + ... + C_m^n \frac{1}{m^n} < (1+\frac{1}{m})^m,$$

de unde, prin trecere la limită după m, obţinem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < e.$$

Aşadar

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < e,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, de unde deducem că şirul de termen general

$$(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$$

este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) = e.$$

e **este iraţional**

Propoziţie. $e \notin \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Să remarcăm faptul că, pentru orice $q \in \mathbb{N}$, avem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \lim_{m\to\infty} (\frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{1}{m!}).$$

Deoarece

$$\frac{1}{(q+1)!} + ... \frac{1}{m!} = \frac{1}{(q+1)!}[1 + \frac{1}{q+2} + ... + \frac{1}{(q+2)(q+3)...m}] <$$

$$< \frac{1}{(q+1)!}[1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} ... + \frac{1}{(q+2)^{m-q-1}}] =$$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\frac{1-(\frac{1}{q+2})^{m-q}}{1-\frac{1}{q+2}} < \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{q!\cdot(q+1)^2} < \frac{1}{q!}\frac{q+2}{q(q+2)} = \frac{1}{q!\cdot q},$$

pentru orice $q, m \in \mathbb{N}$, $m > q$, deducem că

$$\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{1}{m!}) < \frac{1}{q!\cdot q},$$

deci

$$e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q!\cdot q},$$

pentru orice $q \in \mathbb{N}$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$e = \frac{p}{q}.$$

Atunci $q > 1$ (pentru că $e \in (2, 3)$).

Deoarece

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q\cdot q!},$$

deducem că

$$0 < q![\frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!})] < \frac{1}{q} < 1,$$

ceea constituie o contradicţie, deoarece $q![\frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!})] \in \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n) = \gamma$

Propoziţie. *Şirul*

$$(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n)_{n\in\mathbb{N}}$$

este convergent.

Limita sa se notează cu γ.

Demonstraţie. Aşa cum am văzut mai sus

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Conform inegalităţii mediilor avem

$$(1 \cdot (1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1 + n(1 - \frac{1}{n})}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

deci

$$(1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1},$$

de unde

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} < \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n},$$

i.e.

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} < (1 + \frac{1}{n-1})^n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Deoarece

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e,$$

deducem că

$$e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aşadar

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

de unde, având în vedere monotonia funcţiei logaritmice, avem

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \tag{*}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Cu notaţia

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n,$$

inegalitatea de mai sus arată că

$$c_{n+1} - c_n < 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aşadar şirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător.

De asemenea, prin sumarea inegalităţilor de tip $(*)$, deducem că

$$0 < c_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior.

În concluzie, şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Observaţie. *γ este cu aproximaţie de cinci zecimale $0,57721$.*

Nu se cunoaşte dacă γ este număr raţional.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty,$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) = \infty.$$

Exerciţii.

1. Să se arate că dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e.$$

2. Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!},$$

atunci există un şir convergent $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care are proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$

şi

$$e = x_n + \frac{\alpha_n}{n \cdot n!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}(n!e - [n!e]) = 0.$$

4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât

$$x_n < n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x_n}{n})^n = 0.$$

5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x_n}{n})^n = \infty.$$

6. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive şi $p \in \mathbb{N}$.
Să se arate că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\frac{x_1 + x_{n+p}}{x_n})^n \geq e^p.$$

7. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul $(n\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent.
8. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}) = \ln 2.$$

9. Să se arate că şirul $(\{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\})_{n\in\mathbb{N}}$ nu este convergent.

REZUMAT

Şirurile $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **şi** $(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ **sunt convergente şi au aceeaşi limită notată** e**.**

e $\notin\mathbb{Q}$

Şirul $(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este convergent. Limita sa se notează cu** γ**.**

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, Americam Mathematical Society, 2000

3. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39801

4. *Gh. Sireţchi,* **Calcul Diferenţial şi Integral, vol. 1, noţiuni fundamentale***,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985, - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II32924

5. *Andrei Vernescu*, **Numărul** e **şi Matematica Exponenţialei**, Editura Universităţii din Bucureşti, 2004 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

ŞIRURI DE NUMERE REALE CU LIMITĂ INFINITĂ

În conformitate cu definiţia topologiei pe $\overline{\mathbb{R}}$ şi a limitei unui şir de elemente dintr-un spaţiu topologic, suntem conduşi la următoarea

Propoziţie. *Pentru un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem*

$$x_n > \varepsilon.$$

Propoziţie. *Pentru un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem*

$$x_n < \varepsilon.$$

Exerciţii. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale.
Atunci:

i) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$;

ii) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$;

iii) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in (0, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$;

iv) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in [-\infty, 0)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$;

v) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in (0, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$;

vi) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in [-\infty, 0)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$;

vii) dacă $x_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

REZUMAT

Evident că un rezumat nu îşi are rost pentru această secţiune.

LEMA LUI STOLZ-CESÀRO

Un instrument foarte util pentru calculul limitelor de şiruri este lema lui Stolz-Cesàro care permite determinarea limitei unui şir în cazul în care ne confruntăm cu situaţii de genul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Notă istorică. *Otto Stolz* (1842-1905) s-a născut în Hall, Tirol, Austria. A studiat la Gimnaziul şi Universitatea din Insbruck. În 1864 primeşte titlul de doctor în matematică de la Universitatea din Viena, cu o teză de geometrie, unde funcţionează ca Privatdozent până în 1871. Între 1869 şi 1871, beneficiind de o bursă, urmează la Berlin cursurile lui Weierstrass, Kummer şi Kronecker şi la Göttingen cursurile lui Klein. Sub influenţa lui Weierstrass devine interesat de probleme de analiză matematică. În 1876 devine profesor la Universitatea din Insbruck.

Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.*

Atunci, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Demonstraţie. Cu notaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$ vom studia cazurile:

i) $l = \infty$

ii) $l = -\infty$

iii) $l \in \mathbb{R}$.

Pentru cazul i), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$y_n > 0$$

şi

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 3\varepsilon,$$

i.e.

$$x_{n+1}-x_n > 3\varepsilon(y_{n+1}-y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităţilor de mai sus corespunzătoare lui $n \in \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ..., m\}$, obţinem

$$x_{m+1} - x_{n_\varepsilon} > 3\varepsilon(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}),$$

i.e.

$$\frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} > 3\varepsilon - 3\varepsilon\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left|\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}}\right| < \varepsilon$$

şi

$$\left|\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}}\right| < \frac{1}{3},$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Cazul ii) se tratează asemănător.

Pentru cazul iii), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$y_n > 0$$

şi

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l\right| < \varepsilon,$$

i.e.

$$(l - \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l + \varepsilon)(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităţilor de mai sus corespunzătoare lui $n \in \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ..., m\}$, obţinem

$$(l - \varepsilon)(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}) < x_{m+1} - x_{n_\varepsilon} < (l + \varepsilon)(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}),$$

i.e.

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (l-\varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - \varepsilon < \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} - l < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (l+\varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} + \varepsilon$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} < \varepsilon$$

şi

$$-\varepsilon < -(l+\varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} < \varepsilon$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, avem

$$-3\varepsilon = -\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon < \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} - l < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.*

Atunci, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Demonstraţie. Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător.

Cu notaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$, vom studia cazurile:

i) $l = \infty$

ii) $l = -\infty$

iii) $l \in \mathbb{R}$.

Pentru cazul i), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 3\varepsilon,$$

i.e.

$$x_{n+1} - x_n < 3\varepsilon(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităţilor de mai sus corespunzătoare lui $k \in \{n, n+1, ..., m\}$, obţinem

$$x_{m+1} - x_n < 3\varepsilon(y_{m+1} - y_n),$$

i.e.

$$x_n - x_{m+1} > 3\varepsilon(y_n - y_{m+1}),$$

de unde

$$\frac{x_n}{y_n} > 3\varepsilon - 3\varepsilon\frac{y_{m+1}}{y_n} + \frac{x_{m+1}}{y_n},$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$,

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ fixat, deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = \lim\limits_{p\to\infty} y_p = 0$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m_\varepsilon > n \geq n_\varepsilon$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n}$$

şi

$$\frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \frac{1}{3},$$

deci

$$\frac{x_n}{y_n} > 3\varepsilon - 3\varepsilon\frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} + \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n} > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Cazul ii) se tratează asemănător.

Pentru cazul iii), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$l - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \varepsilon,$$

i.e.

$$(l+\varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l-\varepsilon)(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităţilor de mai sus corespunzătoare lui $k \in \{n, n+1, ..., m\}$, obţinem

$$(l+\varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < x_{m+1} - x_n < (l-\varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

i.e.

$$-x_{m+1} + (l+\varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < -x_n < -x_{m+1} + (l-\varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

de unde

$$x_{m+1} - (l-\varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < x_n < x_{m+1} - (l+\varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

deci

$$\frac{x_{m+1}}{y_n} - (l-\varepsilon)\frac{y_{m+1}}{y_n} - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \frac{x_{m+1}}{y_n} - (l+\varepsilon)\frac{y_{m+1}}{y_n} + \varepsilon$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ fixat, deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = \lim\limits_{p\to\infty} y_p = 0$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m_\varepsilon > n \geq n_\varepsilon$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < (l-\varepsilon)\frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon$$

şi

$$-\varepsilon < (l+\varepsilon)\frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon,$$

deci

$$-3\varepsilon = -\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Exerciţii.

1. Fie $l \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\, x_{n+1} - n x_n\right] = l.$$

Să se arate că
$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

2. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că
$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_{n+1} - x_n\right) = 1.$$

Să se arate că
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$
şi
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $x_1 > 0$ şi
$$x_{n+1} = \frac{nx_n}{n + x_n^2},$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

4. Fie $l \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că
$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n) = l.$$

Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3}.$$

5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că
$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n) = 0.$$

Să se arate că
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = 0.$$

6. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$$
şi
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = b.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

7. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şir de numere reale cu proprietatea că $x_1>0$, $y_1>1$,

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{1+y_nx_n^2}$$

şi

$$y_{n+1}=y_n\left(1+x_n^2\right),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Să se arate că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$z_n=x_n\cdot y_n,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, este convergent.

8. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_1=e$ şi

$$x_{n+1}=e^{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Să se calculeze :

i)

$$\lim_{n\to\infty}x_n.$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_ix_j}{n^4}.$$

REZUMAT

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. Atunci, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. Atunci, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214

2. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39801

SERII DE ELEMENTE DIN $\mathbb{R}^p$

În ceea ce mă priveşte, mărturisesc că toate raţionamentele şi calculele bazate pe serii neconvergente mi s-au părut totdeauna aproape suspecte.

Jean d' Alembert

The term infinite summation is an oxymoron. Infinite means without limit, nonterminating, never ending. Summation is the act of coming to the highest point (summus, summit), reaching the totality, achieving the conclusion. How can we conclude a process that never ends? The phrase itself should be a red flag alerting us to the fact that something very subtle and nonintutive is going on. It is safer to speak of an infinite series for a summation that has no end, but we shall use the symbols of adition, the $+$ and the $\sum$. We need to remember that they no longer mean quite the same thing. The Greeks of the classical era avoided such dangerous constructions. An illustration of this can be found in the quadrature of the parabola by Archimedes of Syracuse. To make the problem concrete, we state it as one of finding the area of the region bouned below by $y = x^2$, above by $y = 4$, and on the left by the y axis. We mark the following points: $O(0, 0)$, $P(0, 4)$, $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C_2(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $D_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, $D_2(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$, $D_3(\frac{5}{4}, \frac{25}{16})$, $D_4(\frac{7}{4}, \frac{49}{16})$, ... The area of the triangle OPA is 4. It can be shown that the area of triangle OAB is 1, the sum of the areas of the triangles OBC_1 and BAC_2 is $\frac{1}{4}$, the sum of the areas of triangles OC_1D_1, C_1BD_2, BC_2D_3, and C_2AD_4 is $\frac{1}{16}$, and so on. As we take more triangles, we get succesive approximations to the total area: 4, $4 + 1$, $4 + 1 + \frac{1}{4}$, $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, ... Archimedes then makes the observation that each of these sums brings us closer to $\frac{16}{3}$. ... A modern reader is inclided to make the jump to an infinite summation at this point and say that the actual area is $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... = \frac{16}{3}$. This is precisely what Archimedes did not do. He proceeded very circumspectly, letting K denote the area to be calculated and demonstrating that K could not be larger that $\frac{16}{3}$ nor less than $\frac{16}{3}$. ... It may seem that Archimedes did a lot of unnecessary work simply to avoid infinite summations, but there is a good reason to avoid infinite summations for they are manifestly not summations in the usual sense. Ordinary sums are very well behaved. They are associative ..., they are commutative ... . These simple facts do not always hold for infinite sums.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 13-15

To be able to treat infinite summations with the care that they require, we need to view them from a different angle. The first step in this transformation of perspetive is to move from the endless sum to an endless sequence of partial sums.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina 119.

Noţiunea de serie de elemente din $\mathbb{R}^p$
Operaţii algebrice cu serii
Serii absolut convergente şi serii semiconvergente
Produsul a două serii

Noţiunea de serie de elemente din $\mathbb{R}^p$

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (e, π, γ), precum şi în definirea riguroasă a funcţiilor elementare.

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *definim seria generată de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ca fiind şirul* $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *unde*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent,* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *se numeşte suma seriei şi se notează cu* S.

x_n*-urile poartă numele de termenii seriei, iar* S_n*-urile de sume parţiale.*

Prin convenţie, simbolurile $\sum x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *sau* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *vor desemna atât seria generată de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, cât şi suma sa, în cazul în care seria este convergentă.*

Observaţie. *Deşi în general elementele unei serii sunt indexate cu numere naturale, există situaţii în care este de preferat să începem indexarea cu* $n = 0$ *sau cu* $n = k$, *unde* $k \in \mathbb{N}$.

Observaţie. *Următorul rezultat furnizează o condiţie necesară, însă nu şi suficientă, pentru convergenţa unei serii.*

Lemă. *Dacă seria* $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Reciproca nu este adevărată.*

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Următoarele două rezultate decurg îndată din cele corespunzătoare din capitolul privind şirurile de elemente din $\mathbb{R}^p$.

Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $[0,\infty)$. *Atunci* $\sum x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit.*

În acest caz

$$\sum x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Criteriul lui Cauchy. *Seria* $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *astfel ca pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, *avem*

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m\| < \varepsilon.$$

Exemple standard de serii (seria geometrică şi seria armonică)

1. *Pentru* $a \in \mathbb{R}$, *seria* $\sum a^n$, *numită seria geometrică, este convergentă dacă şi numai dacă* $|a| < 1$.

2. *Pentru* $a \in \mathbb{R}$, *seria* $\sum \frac{1}{n^a}$, *numită seria armonică, este convergentă dacă şi numai dacă* $a > 1$.

Operaţii algebrice cu serii din $\mathbb{R}^p$

Teoremă. *Dacă seriile* $\sum x_n$ *şi* $\sum y_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *sunt convergente, atunci seriile* $\sum(x_n + y_n)$ *şi* $\sum(x_n - y_n)$ *sunt convergente şi sunt valabile relaţiile*

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$$

şi

$$\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n.$$

Dacă seria $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *este convergentă,* $c \in \mathbb{R}$, *iar* $w \in \mathbb{R}^p$, *atunci seriile* $\sum cx_n$ *şi* $\sum w \cdot x_n$ *sunt convergente şi*

$$\sum cx_n = c \sum x_n$$

şi

$$\sum w \cdot x_n = w \cdot \sum x_n.$$

Serii absolut convergente şi serii semiconvergente

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *spunem că seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă dacă seria* $\sum \|x_n\|$ *este convergentă.*

O serie, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, *se numeşte semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.*

Observaţie. *Pentru seriile care au drept termeni numere reale pozitive nu există distincţie între noţiunile de convergenţă şi convergenţă absolută.*

Folosind criteriul lui Cauchy, se poate demonstra următoarea:

Teoremă. *Dacă seria* $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Teorema următoare arată că termenii seriilor absolut convergente pot fi manipulaţi precum termenii sumelor finite, adică nu este importantă ordinea în care se sumează.

Teoremă. *Fie* $\sum x_n$ *o serie absolut convergentă cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *cu suma* S. *Atunci pentru orice bijecţie* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *seria* $\sum x_{\sigma(n)}$ *este convergentă şi are suma* S.

Demonstraţie. Notând $x_{\sigma(n)}$ cu y_m, avem

$$\|y_1\| + \|y_2\| + ... + \|y_m\| \leq \sum \|x_n\|,$$

deci seria $\sum x_{\sigma(n)}$ este absolut convergentă.

Fie S' suma sa.

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|S - (x_1 + x_2 ... + x_n)\| < \varepsilon$$

şi

$$\|x_{n+1}\| + ... + \|x_m\| < \varepsilon.$$

Alegem r astfel ca

$$\left\|S^{'} - (y_1 + y_2 ... + y_r)\right\| < \varepsilon$$

şi astfel ca elementele $x_1, x_2, ..., x_n$ să se afle printre elementele $y_1, y_2, ..., y_r$.

În continuare alegem $m \geq n$ astfel ca elementele $y_1, y_2, ..., y_r$ să se afle printre elementele $x_1, x_2, ..., x_m$.

Atunci

$$\left\|S^{'} - S\right\| \leq \|S - (x_1 + x_2 ... + x_n)\| + \|x_1 + x_2 ... + x_n - (y_1 + y_2 ... + y_r)\|$$

$$+ \left\|S^{'} - (y_1 + y_2 ... + y_r)\right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon + (\|x_{n+1}\| + ... + \|x_m\|) + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

deci

$$S^{'} = S.$$

Teorema următoare arată că, spre deosebire de seriile absolut convergente, seriile semiconvergente au un comportament total opus în privinţa rezultatului obţinut în urma permutării termenilor.

Teoremă. *Fiind dată o serie semiconvergentă de numere reale* $\sum_n u_n$ *şi două numere elemente* α, β *din* $\overline{\mathbb{R}}$, *astfel încât* $\alpha \leq \beta$, *există o bijecţie* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *cu proprietatea că*

$$\underline{\lim} S_n(\sigma) = \alpha$$

şi

$$\overline{\lim} S_n(\sigma) = \beta$$

unde

$$S_n(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} u_{\sigma(i)}.$$

Produsul a două serii

Următoarea definiţie este motivată de modul în care se înmulţesc două polinoame şi este utilă în demonstrarea proprietăţilor uzuale ale funcţiilor elementare.

Definiţie. *Pentru seriile* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ *şi* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j$, *cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, *se defineşte produsul Cauchy al lor ca fiind seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$, *unde*

$$x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + ... + y_k \cdot z_0.$$

Remarcă. *Produsul Cauchy a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă. Spre exemplu, produsul Cauchy al seriei convergente* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *cu ea însăşi nu este o serie convergentă.*

Teoremă. *Dacă seriile, cu termeni din* $\mathbb{R}^p$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ *şi* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j$ *sunt absolut convergente, cu sumele* x, *respectiv* y, *atunci produsul Cauchy al lor este o serie absolut convergentă cu suma* $x \cdot y$.

Teorema lui Mertens. *Fie seriile, cu termeni din* $\mathbb{R}$, $\sum a_n$ *şi* $\sum b_n$, *astfel încât* $\sum a_n$ *converge absolut către* A, *iar* $\sum b_n$ *converge către* B.

Atunci produsul Cauchy al lor este o serie convergentă cu suma AB.

Notă istorică. *Franz Mertens* s-a născut în 1840 în Prusia. A studiat la Berlin cu Kronecker şi Kummer. În 1865 obţine titlul de doctor în matematici, iar apoi profesează în Cracovia, Graz si Viena. Contribuţiile sale esenţiale sunt în teoria analitică a numerelor. A murit în 1927.

Teorema lui Cesàro. *Fie seriile, cu termeni din* $\mathbb{R}$, $\sum a_n$ *şi* $\sum b_n$, *iar* $\sum c_n$ *produsul Cauchy al celor două. Dacă* $\sum a_n$ *converge către* A, *iar* $\sum b_n$ *converge către* B, *atunci, notând cu* $(C_n)_n$ *şirul sumelor parţiale ele seriei* $\sum c_n$, *avem*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_1 + C_2 + ... + C_n}{n} = AB.$$

Exerciţii

1. Să se arate că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$.

2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, este convergentă seria $\sum a_n^2$? Dar, în cazul în care $a_n\geq 0$, pentru orice n, este convergentă seria $\sum\sqrt{a_n}$?

3. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă şi $a_n\geq 0$, pentru orice n, este convergentă seria $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$?

4. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de elemente din $(0,\infty)$. Să se arate că seria $\sum\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ este divergentă.

5. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\frac{a_1+2a_2\ldots+na_n}{n(n+1)}$ este convergentă.

6. Fie $(a_n)_n$ un şir descrescător de elemente din $[0,\infty)$. Să se arate că, dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. Este adevărată reciproca?

7. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Să se arate că seriile $\sum a_n$ şi $\sum(a_n+2a_{n+1})$ au aceeaşi natură.

REZUMAT

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, definim seria generată de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ca fiind şirul $S=(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ se numeşte suma seriei şi se notează cu S. x_n-urile poartă numele de termenii seriei, iar S_n-urile de sume parţiale. Prin convenţie, simbolurile $\sum x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ vor desemna atât seria generată de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cât şi suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $[0,\infty)$. Atunci $\sum x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. În acest caz $\sum x_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}S_n$.

Seria $\sum x_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, avem $\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m\| < \varepsilon$.

Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum a^n$, numită seria geometrică, este convergentă dacă şi numai dacă $|a| < 1$.

Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum \frac{1}{n^a}$, numită seria armonică, este convergentă dacă şi numai dacă $a > 1$.

Dacă seriile $\sum x_n$ şi $\sum y_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, sunt convergente, atunci seriile $\sum(x_n + y_n)$ şi $\sum(x_n - y_n)$ sunt convergente şi sunt valabile relaţiile $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$ şi $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n$. Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, este convergentă, $c \in \mathbb{R}$, iar $w \in \mathbb{R}^p$, atunci seriile $\sum cx_n$ şi $\sum w \cdot x_n$ sunt convergente şi $\sum cx_n = c \sum x_n$ şi $\sum w \cdot x_n = w \cdot \sum x_n$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, spunem că seria $\sum x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum \|x_n\|$ este convergentă.

O serie, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, se numeşte semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Fie $\sum x_n$ o serie absolut convergentă cu termeni din $\mathbb{R}^p$, cu suma S. Atunci pentru orice bijecţie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seria $\sum x_{\sigma(n)}$ este convergentă şi are suma S.

Fiind dată o serie semiconvergentă de numere reale $\sum\limits_n u_n$ şi două numere elemente α, β din $\overline{\mathbb{R}}$, astfel încât $\alpha \leq \beta$, există o bijecţie $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\underline{\lim} S_n(\sigma) = \alpha$ şi $\overline{\lim} S_n(\sigma) = \beta$, unde $S_n(\sigma) := \sum\limits_{i=1}^{n} u_{\sigma(i)}$.

Pentru seriile $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ şi $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, se defineşte produsul Cauchy al lor ca fiind seria $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$, unde $x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + ... + y_k \cdot z_0$.

Dacă seriile, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ şi $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j$ sunt absolut convergente, cu sumele x, respectiv y, atunci produsul Cauchy al lor este o serie absolut convergentă cu suma $x \cdot y$.

Fie seriile, cu termeni din $\mathbb{R}$, $\sum a_n$ şi $\sum b_n$, astfel încât $\sum a_n$ con-

verge absolut către A, iar $\sum b_n$ converge către B. Atunci produsul Cauchy al lor este o serie convergentă cu suma AB.

Fie seriile, cu termeni din $\mathbb{R}$, $\sum a_n$ şi $\sum b_n$, iar $\sum c_n$ produsul Cauchy al celor două. Dacă $\sum a_n$ converge către A iar $\sum b_n$ converge către B, atunci, notând cu $(C_n)_n$ şirul sumelor parţiale ele seriei $\sum c_n$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_1+C_2+...+C_n}{n} = AB$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, Americam Mathematical Society, 2000.

3. *G.E. Şilov*, **Analiză matematică. Funcţii de o variabilă**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

CRITERII DE CONVERGENŢĂ

Criteriile de comparaţie
Criteriul raportului şi criteriul rădăcinii
Criteriul lui Raabe
Criteriile lui Abel şi Dirichlet
Unele funcţii elementare ca sume de serii

Pentru stabilirea naturii unei serii dispunem de unele criterii de convergenţă.

Criteriile de comparaţie

Criteriul de comparaţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $[0,\infty)$ *, astfel încât există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *cu proprietatea că*

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Dacă seria $\sum y_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este convergentă.*

Criteriul de comparaţie la limită. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $(0,\infty)$.

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty)$, *atunci seriile* $\sum x_n$ *şi* $\sum y_n$ *au aceeaşi natură.*

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ *şi seria* $\sum y_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este convergentă.*

c) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ *şi seria* $\sum y_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Observaţie. *Criteriile de mai sus sunt utile dacă dispunem de nişte serii standard a căror natură este cunoscută (şi care de obicei sunt seria geometrică şi seria armonică) şi de inegalităţi şi limite standard adecvate.*

Criteriul raportului şi criteriul rădăcinii

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).
a) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *astfel încât există* $r \in [0,1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$(\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \leq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*
b) Dacă există $r \in (1,\infty)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$(\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \geq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ *este divergentă.*

Corolar. *Pentru* $r \in (0,1)$, *notând cu* S *suma seriei* $\sum x_n$, *iar cu* S_n *sumele sale parţiale avem,*

$$\|S - S_n\| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} (\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r \in [0,1)$ şi *divergentă.pentru* $r \in (1,\infty)$.

Criteriul raportului (al lui D'Alembert).
a) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p - \{0\}$, *astfel încât există* $r \in [0,1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*
b) Dacă există $r \in (1,\infty)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ *este divergentă.*

Notă istorică. *Jean Le Rond D'Alembert* (1717-1783) a fost secretarul Academiei Franceze; a contribuit la studiul Dinamicii şi al Ecuaţiilor Diferenţiale.

Corolar. *Pentru* $r \in [0,1)$, *notând cu* S *suma seriei* $\sum x_n$, *iar cu* S_n *sumele sale parţiale avem,*

$$\|S - S_n\| \leq \frac{r}{1-r} \|x_n\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p - \{0\}$, *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r \in [0,1)$ şi *divergentă.pentru* $r \in (1,\infty)$.

Remarcă. *Deşi criteriul rădăcinii este mai "puternic" decât cel al raportului, el este mai uşor de aplicat, de cele mai multe ori. Dacă* $r = 1$, *ambele criterii sunt inutilizabile. În acest caz următorul criteriu poate decide natura seriei.*

Criteriul lui Raabe

Criteriul lui Raabe

a) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p - \{0\}$, *astfel încât există* $r \in (1,\infty)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{r}{n},$$

atunci seria $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

b) Dacă există $r \in (-\infty, 1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *avem*

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq 1 - \frac{r}{n},$$

atunci seria $\sum x_n$ *nu este absolut convergentă.*

Demonstraţie. a) Să presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in (1,\infty)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{r}{n},$$

i.e.

$$n\left\|x_{n+1}\right\| \leq (n-1)\left\|x_{n}\right\| - (r-1)\left\|x_{n}\right\|,$$

adică

$$0 < (r-1)\left\|x_{n}\right\| \leq (n-1)\left\|x_{n}\right\| - n\left\|x_{n+1}\right\|.$$

Prin urmare, şirul $(n\left\|x_{n+1}\right\|)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător începând cu rangul n_0, deci mărginit.

Prin adunarea inegalităţilor de tipul celor de mai sus, obţinem

$$(r-1)(\left\|x_{n_0}\right\| + ... + \left\|x_{n}\right\|) \leq (n_0-1)\left\|x_{n_0}\right\| - n\left\|x_{n+1}\right\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum \left\|x_n\right\|$ este mărginit, i.e. seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

b) Să presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in (-\infty, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\left\|x_{n+1}\right\|}{\left\|x_{n}\right\|} \geq 1 - \frac{r}{n},$$

i.e.

$$n\left\|x_{n+1}\right\| \geq (n-r)\left\|x_{n}\right\| \geq (n-1)\left\|x_{n}\right\|.$$

Prin urmare, şirul $(n\left\|x_{n+1}\right\|)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător începând cu rangul n_0, deci există un număr real strict pozitiv c astfel încât

$$\left\|x_{n+1}\right\| \geq \frac{c}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Cum seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, deducem că seria $\sum x_n$ nu este absolut convergentă.

Notă istorică. *Joseph L. Raabe* (1801-1859) a predat la Zürich; a contribuit la studiul Geometriei şi al Analizei Matematice.

Corolar. *Pentru $r \in (1, \infty)$, notând cu S suma seriei $\sum x_n$, iar cu S_n sumele sale parţiale avem,*

$$\left\|S - S_n\right\| \leq \frac{n}{r-1}\left\|x_{n+1}\right\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}^p - \{0\}$, *astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}) \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r \in (1,\infty)$ *şi nu este absolut convergentă, pentru* $r \in [0,1)$.

Observaţie. *Formulări mai generale ale criteriilor de mai sus care folosesc noţiunile de limită superioară şi limită inferioară se pot găsi în [2].*

Criteriile lui Abel şi Dirichlet

Criteriile anterioare prezintă condiţii în care o serie este absolut convergentă. Deoarece, aşa cum am menţionat, există serii care sunt convergente fără a fi absolut convergent, este util să dispunem de criterii care să garanteze convergenţa acestor tipuri de serii.

Lema lui Abel. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *iar* $(s_k)_k$ *şirul sumelor parţiale ale seriei* $\sum y_n$.

Atunci, pentru $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, *avem*

$$\sum_{j=n}^{m} x_j \cdot y_j = (x_{m+1} \cdot s_m - x_n \cdot s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m} (x_j - x_{j+1}) \cdot s_j.$$

Criteriul lui Dirichlet. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $\mathbb{R}^p$, *iar* $(s_k)_k$ *şirul sumelor parţiale ale seriei* $\sum y_n$. *Presupunem că* $(s_k)_k$ *este mărginit, că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* 0 *şi că seria* $\sum \|x_n - x_{n+1}\|$ *este convergentă (de exemplu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir descrescător de numere reale pozitive, care converge către* 0*).*

Atunci seria $\sum x_n \cdot y_n$ *este convergentă.*

Notă istorică. *Johann Peter Gustav Lejeunne Dirichlet* s-a născut în februarie 1805 la Düren, Franţa (acum în Germania). Merge la gimnaziu în Bonn începând din 1817, dar după doi ani frecventează un alt colegiul iezuit din Köln. Se hotărăşte să-şi continue studiile la Paris unde frecventează cursurile de la Collège de France şi de la Faculté des Scientes unde are ca profesori pe Fourier, Laplace, Legendre şi Poisson. Din 1823 Dirichlet este luat în ocrotire de către generalul Foy (o figură celebră din armata franceză în timpul războaielor lui Napoleon). În iulie 1825 prezintă la Academia din Paris primul lui articol, asupra teoremei lui Fermat, care-l va face faimos. În acelaşi an generalul Foy moare, iar Dirichlet se hotărăşte să se întoarcă

în Germania. Predă la universităţile din Breslau (1827), Colegiul Militar şi Universitatea din Berlin (1828-1855). A fost un bun prieten al lui Jacobi pe care l-a şi însoţit în Italia (1843) în perioada de convalescenţă a acestuia. În 1855 i se oferă catedra lui Gauss de la Göttingen. A avut numeroase contribuţii la teoria numerelor, a introdus noţiunea modernă de funcţie, iar studiile sale despre stabilitatea sistemului solar l-au condus la celebra problemă a funcţiilor armonice care au condiţii date pe frontieră. De asemenea este faimos pentru stabilirea condiţiilor pentru convergenţa seriilor trigonometrice, publicate în 1828 în Crelle's Journal. A murit în 1859 la Göttingen (Germania).

Demonstraţie. Fie $M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\|s_k\| \leq M,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_j \cdot y_j \right\| \leq M\{\|x_{m+1}\| + \|x_n\| + \sum_{j=n}^{m} \|x_j - x_{j+1}\|\}.$$

Faptul că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către 0 (împreună cu aplicarea criteriului lui Cauchy) va încheia demonstraţia.

Corolar. *În condiţiile de mai sus, cu ipoteza suplimentară că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de numere reale pozitive care converge către 0, avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right\| \leq 2M \|x_{n+1}\|.$$

Criteriul ce urmează întăreşte ipotezele asupra seriei $\sum y_n$, dar le slăbeşte pe cele asupra şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}$.

Criteriul lui Abel. *Fie $\sum y_n$ o serie convergentă de elemente din $\mathbb{R}^p$, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de elemente din $\mathbb{R}$ care este monoton şi convergent.*

Atunci seria $\sum x_n y_n$ este convergentă.

Notă istorică. *Niels Henrik Abel* s-a născut în 1802 în Norvegia. Din 1815 a studiat la şcoala din Christiania sub îndrumarea lui Bernt Holmboe (din 1817), iar din 1821 la Universitatea din aceeaşi localitate. În 1824 a demonstrat imposibilitatea găsirii soluţiilor unui polinom de grad 5 "prin radicali". A avut contribuţii substanţiale la teoria funcţiile eliptice, precum şi la teoria lui Galois. De altfel primul volum al Crelle's Journal, din 1827, conţine un articol al lui Abel, anume "Recherches sur les fonctions elliptiques". A murit în 1829, sănătatea sa fiind şubredă de mulţi ani.

Demonstraţie. Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi că limita sa este x.

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_{m+1}s_m - x_n s_{n-1}\| < \varepsilon,$$

unde $(s_k)_k$ este şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum y_n$.

În plus, fie $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|s_k\| \leq M,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\left\|\sum_{j=n}^{m}(x_j - x_{j+1})s_j\right\| \leq |x_n - x_{m+1}|\, M.$$

Din cele de mai sus şi lema lui Abel se deduce concluzia.

Corolar. *În condiţiile de mai sus, avem*

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}x_j y_j - \sum_{j=1}^{n}x_j y_j\right\| \leq |x|\, \|s - s_n\| + 2M\, \|x - x_{n+1}\|\,.$$

Există o clasă importantă de serii, anume acelea care au termenii numere reale cu semnele alternând.

Definiţie. *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R} - \{0\}$ se numeşte alternat dacă elementele mulţimii $\{(-1)^n x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt toate pozitive sau toate negative. O serie generată de un şir alternat se numeşte alternată.*

Criteriul lui Leibniz. *Fie* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir descrescător de elemente din* $[0,\infty)$.

Atunci seria alternată $\sum(-1)^n z_n$ *este convergentă.*

Mai mult, notând cu S *suma seriei* $\sum(-1)^n z_n$, *iar cu* S_n *sumele sale parţiale avem*

$$\|S-S_n\|\leq z_{n+1},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Unele funcţii elementare ca sume de serii

Noţiunile anterioare ne permit să (re)definim într-o manieră extrem de riguroasă funcţiile elementare.

1. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

Să se arate că

$$e^x \bullet e^y=e^{x+y},$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $x,\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $|x|<1$, seria $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ este absolut convergentă şi

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}x^n=(1+x)^{\alpha}.$$

3. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\sin x$.

Aşadar

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x.$$

4. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\cos x$.

Aşadar

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x.$$

5. Au loc relaţiile:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\sin(-x)=-\sin x,$$

$$\cos(-x)=\cos(x),$$

$$\sin(0)=0,$$

$$\cos(0)=1$$

şi

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Există un număr real, notat cu π, astfel încât:

$$\cos(\frac{\pi}{2})=0,$$

$$\cos x>0,$$

pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ şi

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Definim funcţia $tg : \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi \mid n \in Z\} \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$tg(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

şi funcţia $ctg : \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in Z\} \to \mathbb{R}$, prin

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Observaţie. *Pentru justificarea rezultatelor de mai sus, se pot consulta [1] şi [4].*

Exerciţii

1. Să se arate că:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sin 1$;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3 3^n x}{3^n} = \frac{3}{4} \cos x$;

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi 4}{90}$;

v) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

2. (**Criteriul de condensare al lui Cauchy**) Fie $(a_n)_n$ un şir descrescător de elemente din $[0, \infty)$.

Să se arate că seria $\sum a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum 2^n a_{2^n}$ este convergentă.

Aplicaţie: stabiliţi natura seriei $\sum \frac{1}{n \log n}$.

3. (Criteriul lui Gauss) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive. Dacă există un şir mărginit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\lambda > 0$ astfel încât

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\lambda}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Aplicaţie: să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, ..., -n, ..\}$, atunci seria

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!y} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!y(y+1)} + ... + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)....(\beta+n-1)}{n!y(y+1)...(y+n-1)} + ..,$$

numită seria hipergeometrică, este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha + \beta < y$.

Notă istorică. *Johann Carl Friedrich Gauss* s-a născut la Brunswick, Germania, în aprilie 1777. Încă de la 7 ani i-a uimit pe dascălii săi cu abilităţile sale matematice. În 1888 intră la gimnaziu, iar din 1792, cu sprijinul material al ducelui de Brunswick-Wolfenbüttel, urmează Brunswick Collegium Carolinum. În 1795 merge la Universitatea din Göttingen unde devine prieten cu Farkas Bolyai, prietenie ce va dura peste ani. Ducele de Brunswick continuă să-l sprijine material în decursul pregătirii tezei sale de doctorat sub îndrumarea lui Pfaff. În 1801 publică carte "Disquisitiones Arithmeticae". În 1807 devine directorul observatorului astronomic din Göttingen, iar în 1809 publică o a doua carte, intitulată "Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solemambientum". Contribuţiile lui Gauss la astronomia teoretică iau sfîrşit în 1817, deşi va face observaţii astronomice până la vîrsta de 70 de ani. A mai publicat "Disquisitiones generales circa seriem infinitam", "Methodus nova integralium valores per approximationem inviendi", "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen", "Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata", "Disquisitiones generales circa superficies curva", "Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik" şi "Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii". I se oferă o poziţie la Universitatea din Berlin, pe care însă o refuză. În 1831, la Göttingen este numit profesor fizicianul Wilhelm Weber, împreună cu care Gauss începe un studiu al magnetismului terestru, descoperă legea lui Kirchhoff şi construieşte o variantă primitivă a telegrafului. A murit în februarie 1855.

4. Să se studieze natura următoarelor serii:
i) $\sum e^{-n^2}$;
ii) $\sum \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$;
iii) $\sum \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!} x^n$, unde $x \in (0, \infty)$;
iv) $\sum \sigma(n) x^n$, unde $x \in (0, \infty)$ iar $\sigma(n)$ reprezintă numărul divizorilor lui n;
v) $\sum \frac{1}{n!} (\frac{n}{e})^n$;
vi) $\sum (\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)})^2$;
vii) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;
viii) $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$;
ix) $\sum \sin \pi (2 + \sqrt{3})^n$;
x) $\sum \frac{\cos nx}{n}$, unde $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

xi) $\sum \frac{\sin nx}{n}$, unde $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

xii) $\sum \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}$;

xiii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$;

xiv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$, unde $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^2} x_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

REZUMAT

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de elemente din $[0,\infty)$, astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Dacă seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum x_n$ este convergentă.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de elemente din $(0,\infty)$. a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty)$, atunci seriile $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ au aceeaşi natură. b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ şi seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum x_n$ este convergentă. c) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ şi seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum x_n$ este divergentă.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} (\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \overset{not}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in [0,1)$ şi divergentă pentru $r \in (1,\infty)$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \overset{not}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in [0,1)$ şi divergentă pentru $r \in (1,\infty)$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}) \overset{not}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in (1,\infty)$ şi nu este absolut convergentă pentru $r \in [0,1)$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de elemente din $\mathbb{R}^p$, iar $(s_k)_k$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum y_n$. Presupunem că $(s_k)_k$ este mărginit, că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către 0 şi că seria $\sum \|x_n - x_{n+1}\|$ este convergentă (de exemplu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de numere reale pozitive, care converge către 0). Atunci seria $\sum x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Fie $\sum y_n$ o serie convergentă de elemente din $\mathbb{R}^p$, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de elemente din $\mathbb{R}$ care este monoton şi convergent. Atunci seria $\sum x_n y_n$ este convergentă.

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}-\{0\}$ se numeşte alternat dacă elementele mulţimii $\{(-1)^n x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt toate pozitive sau toate negative. O serie generată de un şir alternat se numeşte alternată.

Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir descrescător de elemente din $[0,\infty)$. Atunci seria alternată $\sum(-1)^n z_n$ este convergentă.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Pentru orice $x, \alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x|<1$, seria $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ este absolut convergentă şi $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^{\alpha}$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\sin x$. Aşadar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\cos x$. Aşadar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$.

Definim funcţia $tg : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in Z\} \to \mathbb{R}$, prin $tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ şi funcţia $ctg : \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in Z\} \to \mathbb{R}$, prin $ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, Americam Mathematical Society, 2000.

4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002- cota la

biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39801

CONTINUITATE

FUNCŢII CONTINUE

Cronologic, conceptul de continuitate este ulterior celui de derivată; logic, însă, îl precede. Derivata este, am putea spune, personajul principal al Calculului diferenţial, tot aşa cum integrala este personajul principal al Calculului integral. Derivata şi integrala au avut de la început o interpretare geometrică şi fizică directă, ele constituiau pentru Newton şi Leibniz modele matematice ale unor realităţi cu un conţinut intuitiv precis. Nu acelaşi lucru se poate spune despre continuitate, în ciuda faptului că termenul ca atare face imagine. Proprietatea de continuitate a apărut în Analiza matematică nu la contactul ei direct cu realitatea empirică, ci în laboratorul de lucru al matematicianului, din necesităţi interne, de ordin teoretic. Două momente importante au marcat (după Cauchy) evoluţia înţelegerii ideii de continuitate. În 1872, Weierstrass a şocat lumea matematică prin exemplul său de funcţie continuă în orice punct din $\mathbb{R}$, dar nederivabilă în nici un punct. În 1905, Emile Picard comenta ironic acest fapt, observând că dacă Newton şi Leibniz ar fi ştiut de existenţa unei funcţii ca aceea a lui Weierstrass, calculul diferenţial nu ar mai fi fost creat. ... Până la Weierstrass se credea că derivabilitatea este o consecinţă a continuităţii, de aceea nici nu prea se vorbea de derivabilitate, ci de derivată (derivabilitatea fiind considerată echivalentă cu continuitatea). În manualele de matematici din secolul al XIX-lea, inclusiv manualele scrise de mari matematicieni, se "demonstra" ceea ce astăzi atrage căderea la examen: Continuitatea implică derivabilitatea. Marele Cauchy nu făcea distincţie între continuitate şi derivabilitate; mai precis, nu bănuia că una dintre aceste proprietăţi ar putea avea loc în absenţa celeilalte. Al doilea moment important în clarificarea ideii de continuitate este anul 1875, când Gaston Darboux dă un exemplu de derivată discontinuă, arătând totodată că orice derivată are proprietatea valorii intermediare (numită astăzi proprietatea lui Darboux): Nu se poate trece de la o valoare la alta fără a se parcurge toate valorile intermediare. Până la Darboux, matematicienii erau convinşi că proprietatea de continuitate este echivalentă cu proprietatea valorii intermediare; chiar termenul de continuitate îşi are explicaţia în această interpretare. Într-adevăr, proprietatea lui Darboux constă în faptul că funcţia nu poate "sări" de la o valoare la alta, trecerea trebuind să se facă în mod continuu (aici cuvântul continuu fiind folosit în accepţiunea sa intuitivă). Dar, aşa cum, confundând continuitatea cu derivabilitatea, Cauchy şi alţi mari matematicieni nu se înşelau decât pe jumătate, deoarece derivabilitatea implică proprietatea de continuitate, confuzia dintre continuitate şi proprietatea lui Darboux conţinea şi ea jumătate de adevăr, deoarece continuitatea implică proprietatea lui Darboux.

Prin clarificările aduse de Weierstrass şi Darboux, devenea clar că intuiţia proprietăţii matematice de continuitate este foarte înşelătoare, o adevărată capcană care urma să fie depăşită abia în secolul nostru (i.e. XX), prin perfecţionarea şi rafinarea instrumentelor Analizei. O literatură considerabilă privind proprietăţile de continuitate, derivabiliate şi proprietatea lui Darboux a permis să se precizeze statutul acestora, gradul lor de independenţă şi de condiţionare reciprocă.

Solomon Marcus, Şocul matematicii, Editura Albatros, Bucureşti, 1987, paginile 246-247

Continuity is such an obvious geometric phenomenon, that only slowly did it dawn on mathematicians, that it needed a precise definition. Well into the 19th century it was simply viewed as a descriptive term for curves that are unbroken. The preeminent calculus text of that era was S. F. Lacroix's Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral. It was first published in 1802. The sixth edition appeared in 1858. Unchanged throughout these editions was its definition of continuity: "By the law of continuity is meant that which is observed in the description of lines by motion, and according to which the consecutive points of the same line succeed each other without any interval". This intuitive notion of continuity is useless when one tries to prove anything. The first appearance of the modern definition of continuity was published by Bernhard Bolzano in 1871 in the Proceedings of the Prague Scientific Society under the title Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwieschen je zwey [sic] Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege. This roughly translates as Purely analytic proof of the theorem that between any two values that yield results of opposite sign there will be at least one real root of the equation. The title says it all. Bolzano was proving that any continuous function has the intermediate value problem. Bolzano's article raises an important point. If he has to prove that continuity implies the intermediate value property, then he is not using the intermediate value property to define continuity. Why not? Such a definition would agree with the intuitive notion of continuity. If a function is defined at every point on the interval $[a, b]$, then to say it has the intermediate property is equivalent to saying that it has no jumps or breaks. There are several problems with choosing this definition of continuity. A function that has the intermediate value property on $[0, 1]$ is not necessarily bounded on that interval. ... Another problem with using the intermediate value problem property to define continuity is that two functions can have it while their sum does not. ... Perhaps the most important aspect of continuity that the intermediate value property lacks, and the one that may have suggested the modern definition, is

that if f is continuous in a neighborhood of a and if there is a small error in the input so that instead of evaluating f at a we evaluate it at something very close to a, then we want the output to be very close to $f(a)$. The function defined by $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, satisfies the intermediate value property no matter how we define $f(0)$, provided that $-1 \leq f(0) \leq 1$, but at $a = 0$ any allowance for error in the input will result in an output that could be any number from -1 to 1. We want to be able to control the variation in the output by setting a tolerance on the input. ...This definition (i.e. the $\delta - \varepsilon$ definition of continuity) does it all for us: it implies the intermediate value property, it implies that a continuous function on $[a, b]$ is bounded and achieves its bounds on that interval, it is preserved when we add two continuous functions or multiply them or even take compositions of continuous functions.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 91-95.

PROPRIETĂŢI LOCALE ALE FUNCŢIILOR CONTINUE

Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct; formulări echivalente
Operaţii algebrice cu funcţii continue
Continuitatea aplicaţiilor liniare având domeniul $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul $\mathbb{R}^q$

Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct; formulări echivalente

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Spunem că funcţia f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a (care depinde de V), astfel ca pentru orice*

$$x \in D \cap U$$

să avem

$$f(x) \in V.$$

Dacă $D_1 \subseteq D$, atunci spunem că f este continuă pe D_1 dacă f este continuă în orice punct din D_1.

Observaţie. *Definiţia de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată şi în cadrul spaţiilor topologice.*

Observaţie. *Din definiţia de mai sus decurge faptul că dacă $a \in D - D'$ (i.e. a este un punct izolat al lui D, adică dacă există o vecinătate U a lui a cu proprietatea că $U \cap D = \{a\}$), atunci f este continuă în a.*

Prezentăm acum o propoziţie care furnizează condiţii echivalente pentru continuitate.

Teoremă. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$.*
Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f este continuă în a.
b) pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, dacă

$$x \in D \text{ şi } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

c) pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elemente din D, care converge către a, şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.
Demonstraţie.
$a) \Rightarrow b)$ Mulţimea

$$M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$$

este o vecinătate a lui $f(a)$.
Ca atare, există U, vecinătate a lui a, astfel ca

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon.$$

Deoarece U este o vecinătate a lui a, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \delta_\varepsilon\} \subseteq U,$$

şi ca atare, dacă

$$x \in D \text{ şi } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$x \in U \cap D$$

şi deci

$$f(x) \in V_\varepsilon,$$

adică

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

b) $\Rightarrow$ *c*) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir, de elemente din D, care converge către a.

Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, dacă

$$x \in D \text{ şi } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$,

$$\|x_n - a\| < \delta_\varepsilon.$$

Cum $x_n \in D$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

c) $\Rightarrow$ *a*) Presupunem, prin reducere la absurd, că *a*) este falsă.

Atunci există V_0, vecinătate a lui $f(a)$, astfel ca, pentru orice U, vecinătate a lui a, există $x_U \in D \cap U$, astfel încât

$$f(x_U) \notin V_0.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \frac{1}{n}\}.$$

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in D \cap U_n$, astfel încât

$$f(x_n) \notin V_0,$$

fapt care contrazice *c*).

Criteriu de discontinuitate. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Funcţia f nu este continuă în a dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elemente din D, care converge către a, dar pentru care şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge către $f(a)$.*

Teoremă. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a, astfel ca*

$$U \cap D = f^{-1}(V).$$

Exerciţii

Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

2. $f : [0,1] \cup \{\frac{3}{2}\} \cup [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, pentru orice $x \in [0,1]$, $f(x) = 2$, pentru orice $x \in [2,3]$ şi $f(\frac{3}{2}) = 7$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x + y, x - 3y)$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Fie $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$g_1(x) = f(x, 0),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, şi $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$g_2(x) = f(0, x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că g_1 şi g_2 sunt continue.

Să se arate că dacă g_1 şi g_2 sunt continue în 0, nu rezultă, în general, că f este continuă în 0.

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ unde } p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ (|p|, q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \end{array} .$$

Funcţia descrisă mai sus poartă numele de funcţia lui Riemann.

Să se studieze continuitatea lui f.

10. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Să se arate că h este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

$$f(x_0) = g(x_0).$$

11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale nenule având următoarele proprietăţi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $f(x + x_n) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că f este constantă.

12. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea că mulţimile punctelor lor de continuitate sunt dense în $[0, 1]$. Să se arate că există cel puţin un punct al intervalului $[0, 1]$ în care ambele funcţii sunt continue.

13. Să se arate că orice funcţie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ care are graficul închis (i.e. pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $[0, 1]$ şi orice $x, y \in [0, 1]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$, rezultă $f(x) = y$) este continuă.

Operaţii algebrice cu funcţii continue

Teoremă. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dacă f, g şi φ sunt continue în a, atunci $f+g$, $f-g$, fg, φf şi $\frac{f}{\varphi}$ (dacă $\varphi(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$) sunt continue în a.*

Teoremă. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este continuă în a, atunci $\|f\|$ este continuă în a.*

Teoremă. *Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^p \to D_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ şi $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^p \to D_3 \subseteq \mathbb{R}^r$. Dacă f este continuă în a, iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.*

Continuitatea aplicaţiilor liniare având domeniul $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul $\mathbb{R}^q$

Până acum am considerat funcţii generale.

În continuare vom considera o clasă specială de funcţii, anume funcţiile liniare.

Definiţie. *O funcţie* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *se numeşte liniară dacă*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

şi

$$f(cx) = cf(x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ *şi* $c \in \mathbb{R}$.

Teoremă. *Fie* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *o funcţie liniară. Atunci există* pq *numere reale, notate* c_{ij}, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,p}$, *astfel încât, pentru orice* $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ *şi* $y = f(x) = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$, *avem:*

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1p}x_p,$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2p}x_p,$$

$$.....$$

$$y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + ... + c_{qp}x_p.$$

Reciproc, dacă considerăm pq *numere reale, notate* c_{ij}, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,p}$, *atunci funcţia care asociază oricărui* $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, *elementul* $y = f(x) = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$, *descris de ecuaţiile de mai sus, este liniară.*

Demonstraţie. Fie

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),$$

$$...$$

$$e_p = (0, ..., 0, 1),$$

şi

$$f(e_1) = (c_{11}, c_{21}, ..., c_{q1}),$$

$$f(e_2) = (c_{12}, c_{22}, ..., c_{q2}),$$

$$...$$

$$f(e_p) = (c_{1p}, c_{2p}, ..., c_{qp}).$$

Pentru un element arbitrar $x=(x_1,x_2,...,x_p)\in\mathbb{R}^p$, avem

$$x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_pe_{p.}$$

Cum f este liniară, avem

$$f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+...+x_pf(e_p),$$

de unde

$$f(x)=x_1(c_{11},c_{21},...,c_{q1})+x_2(c_{12},c_{22},...,c_{q2})+...+x_p(c_{1p},c_{2p},...,c_{qp})=$$

$$=(x_1c_{11}+x_2c_{21}+....+x_pc_{1p},...,x_1c_{q1}+x_2c_{q2}+...+x_pc_{qp})=(y_1,y_2,...,y_q).$$

Reciproca este imediată.

Rezultatul de mai sus ne va ajuta să stabilim că orice aplicaţie liniară $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ este continuă. Acest fapt se va folosi atunci când vom arată că orice funcţie diferenţiabilă este continuă (vezi pagina), precum şi atunci când vom demonstra teorema de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse (vezi pagina).

Propoziţie. *O aplicaţie liniară $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ este continuă.*

Demonstraţie. Avem, utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz,

$$|y_i|^2\leq\|x\|^2\sum_{j=1}^{p}|c_{ij}|^2,$$

de unde

$$\|f(x)\|=\|y\|\leq\|x\|\,(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}|c_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}},$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}^p$.

Ca atare, avem

$$\|f(u-v)\|=\|f(u)-f(v)\|\leq(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}|c_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|,$$

pentru orice $u,v\in\mathbb{R}^p$, ceea ce implică îndată continuitatea lui f.

Observaţie. *Există aplicaţii liniare între anumite spaţii normate (infinit dimensionale) care nu sunt continue.*

Observaţie. *Funcţiile polinomiale, raţionale (i.e. cele care sunt cât de funcţii polinomiale), putere, exponenţială, logaritmică, sin, cos, tg, ctg sunt continue.*

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Spunem că funcţia f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a (care depinde de V), astfel ca pentru orice $x \in D \cap U$ să avem $f(x) \in V$. Dacă $D_1 \subseteq D$, atunci spunem că f este continuă pe D_1 dacă f este continuă în orice punct din D_1.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este continuă în a.

b) pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, dacă $x \in D$ şi $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$, atunci $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

c) pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din D, care converge către a, şirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Funcţia f nu este continuă în a dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din D, care converge către a, dar pentru care şirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge către $f(a)$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a, astfel ca $U \cap D = f^{-1}(V)$.

Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dacă f, g şi φ sunt continue în a, atunci $f + g$, $f - g$, fg, φf şi $\frac{f}{\varphi}$ (dacă $\varphi(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$) sunt continue în a.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este continuă în a, atunci $\|f\|$ este continuă în a.

Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^p \to D_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ şi $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^p \to D_3 \subseteq \mathbb{R}^r$. Dacă f este continuă în a, iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.

O funcţie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte liniară dacă $f(x+y) = f(x)+f(y)$ şi $f(cx) = cf(x)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie liniară. Atunci există pq numere reale, notate c_{ij}, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,p}$, astfel încât, pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}$ şi $y = f(x) = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$, avem: $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x + ... + c_{1p}x_p$, $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2p}x_p$, ..., $y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + ... + c_{qp}x_p$. Reciproc, dacă considerăm pq numere reale, notate c_{ij}, $i = \overline{1,q}$,

$j = \overline{1, p}$, **atunci funcţia care asociază oricărui** $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, **elementul** $y = f(x) = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$, **descris de ecuaţiile de mai sus, este liniară.**

O aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ **este continuă.**

Funcţiile polinomiale, raţionale (i.e. cele care sunt cât de funcţii polinomiale), putere, exponenţială, logaritmică, sin, cos, tg, ctg sunt continue.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

PROPRIETĂŢI GLOBALE ALE FUNCŢIILOR CONTINUE

Caracterizări alternative pentru continuitatea globală
Continuitate şi conexitate:Teorema de permanenţă a conexităţii pentru funcţii continue; Teorema valorilor intermediare a lui Bolzano
Continuitate şi compacitate: Teorema de permanenţă a compacităţii pentru funcţii continue; Teorema valorii minime şi maxime pentru funcţii continue
Teorema de continuitate a inversei pentru funcţii continue

Pîna acum am studiat continuitatea unei funcţii local, adică într-un punct. În continuare vom studia proprietăţile funcţiilor care sunt continue în fiecare punct al domeniului de definiţie.

Caracterizări alternative pentru continuitatea globală

Teorema de continuitate globală. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f *este continuă pe* D
b) pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q$*, există* $G_1 = \overset{\circ}{G_1} \subseteq \mathbb{R}^p$*, astfel încât*

$$G_1 \cap D = f^{-1}(G).$$

c) pentru orice $H = \overline{H} \subseteq \mathbb{R}^q$*, există* $H_1 = \overline{H_1} \subseteq \mathbb{R}^p$*, astfel încât*

$$H_1 \cap D = f^{-1}(H).$$

Observaţie. *Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată şi în cadrul spaţiilor topologice, validitatea ei păstrându-se.*

Demonstraţie
$a) \Rightarrow b)$ Fie

$$G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q.$$

Dacă $a \in f^{-1}(G)$, deoarece G este o vecinătate a lui $f(a)$, rezultă, folosind continuitatea lui f în a, că există $U_a = \overset{\circ}{U_a} \subseteq \mathbb{R}^q$ astfel încât

$$x \in U_a \cap D \Rightarrow f(x) \in G.$$

Alegem

$$G_1 = \bigcup_{a \in G} U_a.$$

$b) \Rightarrow a)$ Fie $a \in D$ şi G o vecinătate deschisă a lui $f(a)$.

Atunci există $G_1 = \overset{\circ}{G_1} \subseteq \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$G_1 \cap D = f^{-1}(G).$$

G_1 este o vecinătate deschisă a lui a deoarece $a \in G_1$.

Dacă $x \in G_1 \cap D$, atunci $f(x) \in G$, deci f este continuă în a.

Acum vom arăta că $b) \Leftrightarrow c)$.

Să observăm pentru început că pentru $B \subseteq \mathbb{R}^q$ şi $C = \mathbb{R}^q - B$ avem

$$f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$$

şi

$$f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = D. \tag{1}$$

Dacă B_1 este o submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ astfel ca

$$B_1 \cap D = f^{-1}(B)$$

şi $C_1 = \mathbb{R}^p - B_1$, atunci

$$C_1 \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

şi

$$D = (B_1 \cap D) \cup (C_1 \cap D) = f^{-1}(B) \cup (C_1 \cap D). \tag{2}$$

Din formule (1) şi (2) deducem că

$$C_1 \cap D = f^{-1}(C).$$

Echivalenţa $b) \Leftrightarrow c)$ decurge imediat din considerentele de mai sus.

Corolar. *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este continuă pe $\mathbb{R}^p$.

b) pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(G)$ *este deschisă în* $\mathbb{R}^p$.
c) pentru orice $H = \overline{H} \subseteq \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(H)$ *este închisă în* $\mathbb{R}^p$.

Observaţie. *Teorema de mai sus nu afirmă că, pentru o funcţie continuă* f *şi o mulţime deschisă* G, $f(G)$ *este deschisă.*

Într-adevăr, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dată de*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci

$$f((-1,1)) = (\frac{1}{2}, 1].$$

Mai mult,

$$f([1,\infty) = (0, \frac{1}{2}]$$

şi

$$f(\mathbb{R}) = (0,1],$$

deci proprietatea unei mulţimi de a fi deschisă sau închisă nu se păstrează prin acţiunea unei funcţii continue.

Vom vedea însă că situaţia este diferită în ceea ce priveşte compacitatea şi conexitatea.

Continuitate şi conexitate

Teorema de permanenţă a conexităţii pentru funcţii continue. *Fie* $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. *Dacă* H *este conexă şi* f *este continuă, atunci* $f(H)$ *este conexă.*

Observaţie. *Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată şi în cadrul spaţiilor topologice, validitatea ei păstrându-se.*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $f(H)$ este neconexă.

Atunci există două mulţimi deschise A şi B din $\mathbb{R}^q$ astfel încât $A \cap f(H)$ şi $B \cap f(H)$ sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este $f(H)$.

Întrucât f este continuă, există două mulţimi deschise A_1 şi B_1 din $\mathbb{R}^p$, astfel ca

$$A_1 \cap H = f^{-1}(A)$$

şi

$$B_1 \cap H = f^{-1}(B).$$

Atunci $A_1 \cap H$ şi $B_1 \cap H$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este H, ceea ce contrazice faptul că H este conexă.

Adjectivul continuă pentru o funcţie sugerează că nu există întreruperi în graficul funcţiei. Ca atare, următorul rezultat nu este neaşteptat.

Teorema valorilor intermediare a lui Bolzano. *Fie* $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *o funcţie mărginită şi continuă, iar* H *conexă.*

Dacă $k \in \mathbb{R}$ *satisface inegalitatea*

$$\inf\{f(x) \mid x \in H\} < k < \sup\{f(x) \mid x \in H\},$$

atunci există cel puţin un punct în H *în care* f *ia valoarea* k*.*

Demonstraţie. Fie mulţimile deschise şi disjuncte

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t < k\}$$

şi

$$B = \{t \in \mathbb{R} \mid t > k\}.$$

Întrucît f este continuă, există două mulţimi deschise, A_1 şi B_1, din $\mathbb{R}^p$, astfel ca

$$A_1 \cap H = f^{-1}(A)$$

şi

$$B_1 \cap H = f^{-1}(B).$$

Dacă f, prin absurd, nu ar lua, pe H, valoarea k, atunci $A_1 \cap H$ şi $B_1 \cap H$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este H, ceea ce contrazice faptul că H este conexă.

Continuitate şi compacitate

Teorema de permanenţă a compacităţii pentru funcţii continue. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$*. Dacă* K *este compactă şi* f *este continuă, atunci* $f(K)$ *este compactă.*

Observaţie. *Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată şi în cadrul spaţiilor topologice validitatea ei păstrându-se.*

Demonstraţie. Ştim că mulţimea K este mărginită şi închisă în $\mathbb{R}^p$.

Vom arăta că $f(K)$ este mărginită şi închisă în $\mathbb{R}^q$.

Să presupunem, prin absurd, că $f(K)$ nu este mărginită.

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in K$, astfel încât

$$\|f(x_n)\| \geq n.$$

Cum K este mărginită, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, deci, în conformitate cu lema lui Cesaro, există un subşir al său convergent către x.

Pentru că $x_n \in K$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi K este închisă, rezultă că $x \in K$.

Deoarece f este continuă în x, există o vecinătate V a lui x, astfel ca, pe V, f este mărginită, ceea ce contrazice faptul că $|f(x_n)| \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Aşadar $f(K)$ este mărginită.

Vom arăta că $f(K)$ este închisă.

Pentru aceasta vom demonstra că orice punct de acumulare y al lui $f(K)$, este din $f(K)$.

Într-adevăr, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $z_n \in K$, astfel ca

$$\|f(z_n) - y\| < \frac{1}{n}.$$

Conform lemei lui Cesaro, există $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, un subşir al lui $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent către z.

Pentru că $z_n \in K$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi K este închisă, rezultă că

$$z \in K.$$

Deoarece f este continuă în z, avem

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = y,$$

ceea ce arată că $y \in f(K)$.

Deci $f(K)$ este închisă.

Teorema valorii minime şi maxime pentru funcţii continue. *Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă, unde K este mulţime compactă.*

Atunci există x^* şi x_*, puncte din K, astfel încât

$$\|f(x^*)\| = \sup_{x\in K} \|f(x)\|$$

şi

$$\|f(x_*)\| = \inf_{x\in K} \|f(x)\| .$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă, $\|f\|$ este continuă.

Ca atare mulţimea $\{\|f(x)\| \mid x \in K\}$ este mărginită.

Fie

$$M = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in K\}$$

şi să considerăm un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elemente din K, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f(x_n)\| \geq M - \frac{1}{n}.$$

Atunci există un punct x^* din K şi $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent către x^*.

Deoarece $\|f\|$ este continuă, avem

$$\|f(x^*)\| = M = \sup_{x\in K} \|f(x)\| .$$

Similar se arată cealaltă parte a teoremei.

Corolarul de mai jos se va folosi în demonstraţia Corolarului de caracterizare a aplicaţiilor liniare şi injective de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$ (vezi pagina 236), Teoremei de aproximare a lui Bernstein (vezi pagina 267), Criteriului de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile (vezi pagina 371), precum şi a Primei teoreme de media la integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 408).

Corolar. *Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, unde K este mulţime compactă. Atunci există x^* şi x_*, puncte din K, astfel încât*

$$f(x^*) = \sup_{x\in K} f(x)$$

şi

$$f(x_*) = \inf_{x\in K} f(x).$$

Teorema de continuitate a inversei pentru funcţii continue

Observaţie. Să remarcăm că $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\}$ este mărginită şi închisă.

Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *o aplicaţie liniară* şi x^* şi x_* puncte din S, astfel încât

$$\|f(x^*)\| = \sup_{x \in S} \|f(x)\| = M$$

şi

$$\|f(x_*)\| = \inf_{x \in S} \|f(x)\| = m.$$

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p - \{0\}$, avem

$$\frac{x}{\|x\|} \in S,$$

deci

$$m \leq \left\| f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq M,$$

de unde

$$m \|x\| \leq \|f(x)\| \leq M \|x\|,$$

relaţie valabilă şi pentru $x = 0$.

Dacă $m > 0$, *atunci* f *este injectivă,* căci pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$f(x) = f(y),$$

avem $f(x - y) = 0$, deci $m \|x - y\| \leq \|f(x - y)\| = 0$, de unde,

$$x = y.$$

Vom arăta că are loc şi reciproca (rezultata care va fi utilizat în cadrul demonstraţiei teoremei de injectivitate locală).

Corolar. *Fie* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *o aplicaţie liniară şi injectivă. Atunci există* $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, *astfel încât*

$$m \|x\| \leq \|f(x)\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Demonstraţie. Avem

$$m = \inf_{x \in S} \|f(x)\| > 0,$$

deoarece, în caz contrar, există $x_* \in S$, astfel ca

$$m = \|f(x_*)\| = 0,$$

de unde $f(x_*) = f(0)$, deci, cum f este injectivă, $x_* = 0$, ceea ce contrazice $x_* \in S$.

Atunci, pentru orice $x \in X - \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$, deci

$$m \leq \left\| f(\frac{x}{\|x\|}) \right\|,$$

de unde

$$m \|x\| \leq \|f(x)\|,$$

inegalitate care este validă şi pentru $x = 0$.

Observaţie. *Din corolarul de mai sus rezultă că dacă aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este bijectivă, atunci inversa sa este continuă. Vom arăta că acest rezultat este valabil şi în cazul în care f nu este liniară.*

Teorema de continuitate a inversei pentru funcţii continue. *Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă şi injectivă, unde K este o mulţime compactă. Atunci funcţia $f^{-1} : f(K) \to K$ este continuă.*

Demonstraţie. Fie H o submulţime închisă din $\mathbb{R}^p$.

Atunci $H \cap K$ este închisă şi mărginită, deci compactă.

Drept urmare, $H_1 = f(H \cap K)$ este compactă, deci închisă.

Avem

$$H_1 = f(H \cap K) = (f^{-1})^{-1}(H),$$

deci

$$H_1 \cap f(K) = (f^{-1})^{-1}(H),$$

relaţie care arată că funcţia $f^{-1} : f(K) \to K$ este continuă.

Exerciţii.

1. Vom spune că o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux dacă pentru orice interval $J \subseteq I$, $f(J)$ este interval.

Să se arate că o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux.

2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} 2x, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{array},$$

are proprietatea lui Darboux, dar nu este continuă

3. Să se arate că o funcţie injectivă $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, care are proprietatea lui Darboux este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

4. Să se arate că nu există nicio funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$(f \circ f)(x) = -x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. Să se arate că orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are proprietatea că

$$|f(x) - f(y| \geq |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este surjectivă.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare. Să se arate că $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ este continuă şi strict crescătoare.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, care nu ia aceeaşi valoare de două ori. Este adevărat că f este strict monotonă?

6. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie, astfel încât fiecare valoare a sa este luată de exact două ori. Să se arate că f nu este continuă pe $[0, 1]$.

7. Să se arate că nu există funcţii continue, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x + 1) \notin \mathbb{Q}$.

8. Să se arate că nu există funcţii continue şi bijective din $\mathbb{R}^2$ în $\mathbb{R}$.

9. Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue astfel încât $f \circ g = g \circ f$. Să se arate că există $x_0 \in [a, b]$, astfel ca $f(x_0) = g(x_0)$.

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) f este continuă pe D; b) pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q$, există $G_1 = \overset{\circ}{G_1} \subseteq \mathbb{R}^p$, astfel încât $G_1 \cap D = f^{-1}(G)$; c) pentru orice $H = \overline{H} \subseteq \mathbb{R}^q$, există $H_1 = \overline{H_1} \subseteq \mathbb{R}^p$, astfel încât $H_1 \cap D = f^{-1}(H)$.

Fie $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dacă H este conexă şi f este continuă, atunci $f(H)$ este conexă.

Fie $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi continuă, iar H conexă. Dacă $k \in \mathbb{R}$ satisface inegalitatea $\inf\{f(x) \mid x \in H\} < k < \sup\{f(x) \mid x \in H\}$, atunci există cel puţin un punct în H în care f ia valoarea k.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dacă K este compactă şi f este continuă, atunci $f(K)$ este compactă.

Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă, unde K este mulţime compactă. Atunci există x^* şi x_*, puncte din K, astfel încât $\|f(x^*)\| = \sup\limits_{x \in K} \|f(x)\|$ şi $\|f(x_*)\| = \inf\limits_{x \in K} \|f(x)\|$.

Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă şi injectivă, unde K este o mulţime compactă. Atunci funcţia $f^{-1} : f(K) \to K$ este continuă.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023.

ŞIRURI DE FUNCŢII CONTINUE

Limita uniformă a unui şir de funcţii continue este o funcţie continuă
Teorema lui Dini

Limita uniformă a unui şir de funcţii continue este o funcţie continuă

Limita unui şir de funcţii continue nu este neapărat o funcţie continuă, aşa cum se poate observa pe exemplul următor: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ şi orice $x \in [0,1]$.

Vom arăta că dacă şirul de funcţii continue converge uniform, atunci limita sa este o funcţie continuă. Mai precis avem următoarea

Teoremă. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, un şir de funcţii continue care converge uniform către $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă.*

Demonstraţie. Deoarece şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniform către f, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $x \in D$, avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru arăta că f este continuă într-un punct arbitrar $a \in D$, să observăm că

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deoarece f_{n_ε} este continuă în a, există $\delta_{\varepsilon,a} > 0$, astfel încât dacă $x \in D$ şi $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$, atunci

$$\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ca atare, dacă $x \in D$ şi $\|x-a\| < \delta_{\varepsilon,a}$, avem

$$\|f(x)-f(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

ceea ce stabileşte continuitatea lui f în a.

Teorema lui Dini

Teorema următoare furnizează condiţii suficiente pentru ca un şir de funcţii continue care converge simplu, pe un compact, către o funcţie continuă, să conveargă uniform.

Teorema lui Dini. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime compactă, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, un şir de funcţii continue astfel încât*

$$f_{n+1} \leq f_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$f_n \xrightarrow{s} f,$$

unde $f : A \to \mathbb{R}$, este o funcţie continuă.

Atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Demonstraţie. Considerând, $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$, în loc de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, putem presupune că $f \equiv 0$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$A_n = f_n^{-1}([\varepsilon,\infty)).$$

Deoarece f_n este continuă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi A este compactă, rezultă că A_n este închisă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Evident

$$A_{n+1} \subseteq A_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Avem

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset,$$

căci, altminteri, dacă

$$x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

atunci

$$f_n(x_0) \geq \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fapt care contrazice ipoteza

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0.$$

Atunci, conform teoremei lui Cantor, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$A_{n_0} = \emptyset.$$

Drept urmare, pentru orice $x \in A$,

$$f_{n_0}(x) \leq \varepsilon,$$

de unde, pentru orice $x \in A$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n_0}(x) \leq \varepsilon,$$

adică

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Notă istorică. *Ulisse Dini* (1845-1918) a studiat la Pisa şi Paris cu Bertrand şi Hermite. A predat la Universitatea din Pisa, al cărei rector a şi fost între anii 1888 şi 1890. A fost ales, în 1880, membru al parlamentului italian şi senator, în 1880. În 1908 devine director al Scuola Normale di Pisa. A contribuit la dezvoltarea geometriei şi analizei matematice (în special la teoria seriilor Fourier). Dini a publicat multe monografii (Fundamentele teoriei funcţiilor de o variabilă reală, în 1878; un tratat despre seriile Fourier, în 1880 etc).

Exerciţii

1. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0,1]$, converge uniform pe orice interval de forma $[a,1]$, unde $0 < a < 1$.

2. Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \cos^{2n} x,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, unde $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Să se arate că $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe $[a, \frac{\pi}{2}]$ şi neuniform pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirului de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [1, 2] \to \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1 + (\ln x)^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [1, 2]$.

4. Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dat de recurenţa:

$$f_1 \equiv 0$$

şi

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0, 1]$.

Să se arate că $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

5. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0, 1]$, nu converge uniform.

6. Să se arate că şirul de funcţii discontinue $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N},\ (m, n) = 1 \\ 0, & \text{alminteri} \end{array} \right.,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in \mathbb{R}$, converge uniform către o funcţie continuă.

7. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care sunt limita uniformă a unui şir de polinoame.

REZUMAT

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, **un şir de funcţii continue care converge uniform către** $f : D \to \mathbb{R}$. **Atunci** f **este continuă.**

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ **o mulţime compactă,** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, **un şir de funcţii continue astfel încât, pentru orice** $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \leq f_n$, **şi** $f_n \xrightarrow{s} f$, **unde** $f : A \to \mathbb{R}$, **este o funcţie continuă. Atunci** $f_n \xrightarrow{u} f$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme,** Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 23777.

CONTINUITATE UNIFORMĂ

Noţiunea de continuitate uniformă
Teorema continuităţii uniforme
Noţiunea de funcţie Lipschitz

Noţiunea de continuitate uniformă

Teorema principală a acestei secţiuni, anume teorema continuităţii uniforme este instrumentul central din demonstraţia integrabilităţii funcţiilor continue.

Pentru o funcţie, $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, continuitatea lui f pe D echivalează cu:

pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ şi $a \in D$, există $\delta_{a,\varepsilon} \in \mathbb{R}$, $\delta_{a,\varepsilon} > 0$ astfel încât, dacă $x \in D$ şi $\|x - a\| < \delta_{a,\varepsilon}$, atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Trebuie reţinut aici că $\delta_{a,\varepsilon}$ depinde, în general, atât de ε, cât şi de a.

Dependenţa lui $\delta_{a,\varepsilon}$ de a reflectă faptul că f îşi poate schimba rapid valorile în jurul lui a.

Uneori se poate alege $\delta_{a,\varepsilon}$ independent de a, adică dependent numai de ε.

Spre exemplu, pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = 2x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, putem alege

$$\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem

$$f(x) - f(a) = \frac{a - x}{ax}.$$

Dacă $\delta < a$ şi $|x - a| \leq \delta$, atunci

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{\delta}{a(a - \delta)},$$

iar această inegalitate nu poate fi îmbunătăţită, deoarece egalitatea are loc pentru $x = a - \delta$.

Dacă dorim $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, atunci cea mai mare valoare pe care o putem alege pentru δ este

$$\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}.$$

Aşadar, pentru $a > 0$, f este continuă în a, deoarece putem alege $\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon a^2}{1+\varepsilon a}$ şi aceasta este cea mai mare valoare posibilă.

Deoarece

$$\inf_{a>0} \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} = 0,$$

nu putem alege $\delta_{a,\varepsilon}$ independent de a.

Dacă vom restrînge domeniul lui f la $[u, \infty)$, atunci

$$\inf_{a>0} \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} = \frac{\varepsilon u^2}{1 + \varepsilon u} > 0$$

poate fi ales ca fiind $\delta_{a,\varepsilon}$ şi, după cum se observă, această cantitate nu depinde de a.

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $H \subseteq D$. Spunem că f este uniform continuă pe H dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, pentru orice $x, a \in H$ şi $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$, avem*

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Observaţie. *Reamintim că diametrul unei submulţimi A a lui R este $\sup\limits_{x,y \in A} |x - y|$. Cu această terminologie, o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă pe H dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel*

încât oricum am alege în H o submulţime A cu diametrul inferior lui δ_ε, imaginea ei are diametrul inferior lui ε.

Observaţie. *Este clar că o funcţie uniform continuă pe H este continuă pe H. Reciproca nu este, în general, valabilă.*

Teorema continuităţii uniforme

Rezultatul următor arată că pe o mulţime compactă, continuitatea este automat uniformă. Acest rezultat este foarte util fiind folosit pentru a demonstra că orice funcţie continuă pe un compact din $\mathbb{R}^p$ se poate aproxima uniform cu funcţii în scară, respectiv cu funcţii continue liniare pe porţiuni, în demonstraţia Teoremei de aproximare a lui Bernstein, în demonstraţia Teoremei de integrabilitate a funcţiilor continue (pentru integrala Riemann-Stieltjes), Teoremei de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann, Teoremei de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina), Teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina), Teoremei de permutare a ordinii de integrare (vezi pagina), Primei teoreme de integrare Riemann a funcţiilor de mai multe variabile (vezi pagina), precum şi în cadrul demonstraţiei teoremei de reprezentare a lui Riesz (vezi pagina).

Teorema continuităţii uniforme. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă şi K o submulţime compactă a lui D. Atunci f este uniform continuă pe K.*

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ vom considera acoperirea cu mulţimi deschise a lui K dată de familia $\{f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2}) \mid u \in \mathbb{R}^q\}$.

Conform teoremei de acoperire a lui Lebesgue, există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \delta$, există $u \in \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$x, y \in f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2}),$$

i.e.

$$f(x), f(y) \in f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2}),$$

ceea ce înseamnă că

$$\|f(x) - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$\|f(y) - u\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ceea ce implică

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - u\| + \|f(y) - u\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in K$ astfel încât

$$\|x - y\| < \delta,$$

rezultă

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

fact care ne asigură că f este uniform continuă pe K.

Noţiunea de funcţie Lipschitz

Funcţiile Lipschitz constituie o clasă importantă de funcţii uniform continue.

Definiţie. *O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte Lipschitz dacă există $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, astfel încât*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in D$.

Dacă se poate alege $M < 1$, f se numeşte contracţie.

Observaţie. *Este clar, alegând $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$, că orice funcţie Lipschitz este uniform continuă. Reciproca nu este valabilă (vezi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice $x \in [0, 1]$). Orice funcţie liniară este Lipschitz. Mai mult, aşa cum vom vedea, orice funcţie derivabilă, cu derivata mărginită, este Lipschitz.*

Notă istorică. *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz* s-a născut la 14 mai 1832, la Königsberg, Germania. A început de timpuriu studiile universitare la Universitatea din Königsberg, sub îndrumarea lui Franz Neumann. Ulterior merge la Berlin, unde este îndrumat de către Dirichlet şi unde obţine titlul de doctor în matematici în august 1853. În următorii patru ani predă la gimnaziile din Königsberg şi din Elbing, pentru ca în anul 1857 să devină Privatdozent la Universitatea din Berlin. Este numit, în anul 1862, profesor extraordinar la Breslau. Împreună cu Heinrich Schroeter şi M. Frankenheim,

pune bazele unui seminar de matematică şi fizică matematică. În anul 1864 este numit profesor la Universitatea din Bonn, unde îşi va petrece restul carierei, deşi a primit o ofertă pentru ocuparea unui post la Göttingen. Cel mai remarcabil fapt în legătură cu activitatea matematică a lui Lipschitz este diversitatea domeniilor de care s-a ocupat: teoria numerelor, teoria funcţiilor Bessel, teoria seriilor Fourier, ecuaţii diferenţiale, mecanică analitică, teoria potenţialului.

A murit la Bonn, Germania, la 7 octombrie 1903.

Exerciţii

1. O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă şi numai dacă există $c \in A$ astfel încât f este uniform continuă pe $A_{c,s} = A \cap (-\infty, c]$ şi pe $A_{c,d} = A \cap [c, \infty)$.

2. O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă şi numai dacă pentru orice două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

3. Fie $a \geq 0$. Să se arate că funcţia $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \ln x$, pentru orice $x \in (a, \infty)$, este uniform continuă dacă şi numai dacă $a > 0$.

4. Este uniform continuă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

5. Să se arate că $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt uniform continue, dar fg nu este uniform continuă.

6. Să se arate că $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă şi numai dacă poate fi extinsă la o funcţie continuă pe $[a, b]$. Este $f : (0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, uniform continuă?

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ **şi** $H \subseteq D$**. Spunem că** f **este uniform continuă pe** H **dacă pentru orice** $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$**, există** $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$**, astfel încât, pentru orice** $x, a \in H$ **şi** $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$**, avem** $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$**.**

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ **o funcţie continuă şi** K **o submulţime compactă a lui** D**. Atunci** f **este uniform continuă pe** K**.**

O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ **se numeşte Lipschitz dacă există** $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, **astfel încât** $\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$**, pentru orice** $x, y \in D$**. Dacă se poate alege** $M < 1$, f **se numeşte contracţie.**

Orice funcţie Lipschitz este uniform continuă.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *James Munkres*, **Topology. A first course**, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

3. *Gheorghe Sireţchi*, **Calcul Diferenţial şi Integral, vol. 1, Noţiuni fundamentale,** Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32924

TEOREME DE PUNCT FIX

Noţiunea de punct fix
Teoreme de punct fix
Teorema punctelor fixe pentru contracţii
Principiul contracţiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli
Teorema de punct fix a lui Brouwer

Noţiunea de punct fix

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Un punct $u \in D$ se numeşte punct fix al lui f dacă*

$$f(u) = u.$$

Multe rezultate au la baza demonstraţiei existenţa punctelor fixe pentru o funcţie. Ca atare, este de dorit să dispunem de rezultate care să asigure existenţa punctelor fixe.

Teoreme de punct fix

Teorema punctelor fixe pentru contracţii. *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o contracţie. Atunci f are un unic punct fix.*

Demonstraţie. Conform definiţiei contracţiei, există $C \in (0, 1)$ astfel încât

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$.

Definim inductiv şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel:

$x_1 \in \mathbb{R}^p$ este arbitrar

şi

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către un punct fix (unic) al lui f şi vom estima viteza de convergenţă.

Folosind metoda inducţiei matematice se arată că

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C^{n-1} \|x_2 - x_1\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, folosind relaţia de mai sus, avem

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + ... + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$$

$$\leq (C^{m-2} + C^{m-3} + ... + C^{n-1}) \|x_2 - x_1\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} C^{n-1} = 0$, relaţia de mai sus arată că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy, deci convergent.

Fie

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Atunci

$$f(u) = u.$$

Mai mult, prin trecere la limită, după m, în inegalitatea de mai sus, obţinem următoarea estimare a vitezei de convergenţă:

$$\|u - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Acum vom arăta că punctul u este unic.

Să presupunem că v este un alt punct fix al lui f.

Atunci

$$\|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq C \|u - v\|,$$

de unde

$$0 \leq (C - 1) \|u - v\|,$$

deci

$$\|u - v\| = 0,$$

adică

$$u = v. \ \square$$

Dacă funcţia f nu este definită pe $\mathbb{R}^p$, trebuie să avem grijă ca elementele şirului definit iterativ să facă parte din domeniul de definiţie al funcţiei.

Teoremă. *Fie o contracţie* $f : D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\} \to \mathbb{R}^q$*, având constanta* C*, astfel încât*

$$\|f(0)\| \leq B(1 - C).$$

Atunci şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, definit astfel:*

$$x_1 = 0$$

şi

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*, converge către un unic punct fix al lui* f*, care se găseşte în* D*.*

Demonstraţie. Vom arăta că elementele şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fac parte din D, ceea ce va încheia demonstraţia (care decurge ca mai sus).

Din ipoteză,

$$\|x_2\| = \|f(0)\| \leq B(1 - C) \leq B.$$

Cum

$$\|x_3 - x_2\| \leq C \|x_2\|,$$

deducem că

$$\|x_3\| \leq \|x_2\| + C \|x_2\| = (1 + C) \|x_2\| \leq B(1 - C^2),$$

iar inductiv obţinem

$$\|x_{n+1}\| \leq B(1 - C^n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Observaţie. *Rezultatele de mai sus au anumite avantaje: furnizează o metodă constructivă pentru punctul fix şi o estimare a erorii de aproximare precum şi unicitatea punctului fix. Totuşi, cerinţa ca* f *să fie contracţie este foarte restrictivă.*

Observaţie. *Teorema punctelor fixe pentru contracţii, în ipostaze mai generale (vezi mai jos), cunoscută şi sub numele de principiul contracţiilor al lui Banach-Caccioppoli sau Picard-Banach, este un instrument esenţial în stabilirea existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale.*

Notă istorică. *Charles Emile Picard* s-a născut în 1856 la Paris. Studiază la Liceul Napoléon, numit ulterior Henri IV, fiind un elev eminent şi

este admis la École Polytechnique şi École Normale Supérieure fiind clasat al doilea, respectiv primul la examenul de admitere. Absolvă École Normale Supérieure unde şi funcţionează ca asitent timp de un an, pentru ca apoi, în 1878 să fie numit lector la Universitatea din Paris, iar mai apoi, în 1879, profesor la Toulouse. În 1881 se întoarce la Paris unde este numit conferenţiar pentru mecanică şi astronomie la École Normale. În 1881 Picard devine membru al secţiei de matematică a Académie des Sciences. În acelaşi an se căsătoreşte cu fata lui Hermite cu care are trei copii: o fată şi doi băieţi, care au murit în primul război mondial. În 1885 Picard este numit la catedra de calcul diferenţial de la Sorbona, deşi nu împlinise vârsta de 30 de ani (aşa cum prevedeau regulamentele academice ca o condiţie obligatorie pentru ocuparea unei catedre). În 1879 schimbă această catedră cu cea de analiză matematică şi algebră superioară. A avut contribuţii importante la dezvoltarea analizei matematice, teoriei funcţiilor, ecuaţiilor diferenţiale şi a geometriei analitice. A scris o carte de referinţă în trei volume, publicată între 1891 şi 1896, intitulată Traité d'analyse. A aplicat analiza matematică la studiul elasticităţii, căldurii şi electrictăţii. Picard a primit premiul Poncelet, în 1886, Grand Prix des Sciences Mathématiques, în 1888, Grande Croix de la Légion d'Honneur, în 1932, precum şi medalia de aur Mittag-Leffler, în 1937. A devenit membru al Academiei Franceze în 1924 şi este ales preşedinte al Congresului Internaţional al Matematicienilor de la Strasbourg din 1920. Iată cum îl caracteriza Hadamard: "O trăsătură definitorie a personalităţii ştiinţifice a lui Picard a fost perfecţiunea actului de predare, unul dintre cele mai minunate, dacă nu cel mai minunat pe care l-am întâlnit". Picard a murit în 1941 la Paris.

Notă istorică. *Stefan Banach* s-a născut într-un mic sat numit Ostrowsko la 50 de kilometri în sudul oraşului Cracovia, din Polonia, la 30 martie 1892. A urmat cursurile şcolii primare din Krakowia iar in 1902 începe studiile la gimnaziul Henryk Sienkiewicz din Crakovia. Printr-o întãmplare fericită unul dintre colegii lui Banach a fost Witold Wilkosz care se pregătea să devină profesor de matematică. Gimnaziul respectiv nu era unul dintre cele mai bune şi drept urmare Wilkosz s-a mutat la un altul. Banach însă rămâne la Henryk Sienkiewicz, dar va avea în continuare strânse legături cu Wilkosz. De-a lungul primilor ani, la acest gimnaziu, Banach primeşte note excelente la matematică. Totuşi trece examenul de final fără strălucire. La terminarea gimnaziului, Banach şi Wilkosz doreau sa studieze matematica,însă amîndoi au simţit că nimic nou nu mai este cu putinţă în matematică,

aşa că au ales să studieze alte domenii: Banach ingineria, iar Wilkosz limbile orientale. Faptul că doi viitori extraordinari matematicieni au luat această decizie arată că nu a existat nimeni care să-i îndrume în mod adecvat. Banach părăseşte Krakowia şi se mută la Liov, unde devine student la Universitatea Tehnică. Este aproape sigur că, fără nici un ajutor material din partea familei, Banach s-a întreţinut din lecţii particulare. Acest fapt i-a solicitat foarte mult timp, căci i-a fost necesar mai mult timp decât în mod normal pentru a absolvi aceste studii. Banach nu era apt din punct de vedere fizic pentru satisfacerea stagiului militar, datorită unor grave probleme de vedere ce i-au afectat ochiul stâng. În timpul primului război mondial a contribuit la construcţia de drumuri şi a predat la diverse şcoli din Cracovia. De asemenea a audiat diverse cursuri de matematică la Universitatea din acest oraş. O întâmplare neobişnuită avea să aibă un efect major asupra carierei sale. Steinhaus, care îşi satisfăcea serviciul militar, era pe cale să ocupe un post la Universitatea Jan Kazimierz din Liov, dar locuia încă la Cracovia aşteptând numirea. Obişnuia să se plimbe pe străzile Cracoviei pe înserate. Iată ce relatează el însuşi în memoriile sale: " În timpul unei astfel de plimbări am auzit cuvintele măsura Lebesgue. M-am apropiat de banca din parc şi m-am prezentat celor doi tineri ucenici în matematică. Cei doi erau Stefan Banach şi Otto Nikodym. De atunci ne-am întâlnit regulat şi am decis să înfiinţăm o societate de matematică". Steinhaus i-a comunicat lui Banach o problemă la care se gândise fără succes. După câteva zile, Banach a avut ideea principală pentru problema respectivă, iar cei doi au scris un articol pe această temă. Războiul a întârziat publicarea acestui prim articol al lui Banach care a apărut în Buletinul Academiei din Cracovia în 1918. Din acest moment Banach a publicat articole importante de matematică într-un ritm susţinut. Lui Banach i s-a oferit o poziţie de către Lomnicki la Universitatea Tehnică din Liov. Aici şi-a susţinut teza de doctorat sub îndrumarea lui Lomnicki în 1920 (teză care este considerată ca marcând naşterea analizei funcţionale), iar, în 1922, Universitatea Jan Kazimierz din Liov i-a acordat "habilitation" pentru o teză în teoria măsurii. În 1924 Banach a fost promovat ca profesor plin şi a petrecut anul academic 1925 la Paris. Anii dintre cele două războaie mondiale au fost extrem de plini pentru Banach. În 1929 împreună cu Steinhaus a înfiinţat Studia Mathematica (a cărei politică editorială era concentrarea pe cercetările de analiză funcţională şi alte domenii conexe). În 1931, împreună cu Steinhaus, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz şi Sierpinski, a înfiinţat o serie de Monografii Matematice. Primul volum din această serie, intitulat "Teoria operatorilor liniari", a fost scris de Banach şi a apărut

în 1932. În 1927 Kuratowski a ocupat o poziţie la Universitatea Tehnică din Liov, unde a lucrat până în 1934. Împreună cu Banach a scris, în acestă perioadă, câteva articole. Modul în care Banach lucra era total neconvenţional. Îi plăcea să facă matematică împreună cu colegii săi într-o cafenea din Liov. Iată ce spunea Ulam: " Era dificil să stai în cafenea sau să bei mai mult decât Banach. Discutam probleme propuse chiar acolo, adeseori cu nici un rezultat chiar după câteva ore de gîndire. A doua zi Banach apărea cu câteva mici foi de hîrtie conţinând schema demonstraţiei pe care o găsise". În 1939 Banach a fost ales preşedintele Societăţii Poloneze de Matematică. La începutul celui de al doilea război mondial Liovul a fost ocupat de către trupele sovietice. Banach era în relaţii bune cu matematicienii sovietici, vizitând Moscova de cîteva ori. A fost bine tratat de către noua administraţie sovietică şi chiar numit decanul Facultăţii de Ştiinţe al Universităţii, acum renumită Ivan Franko. După ocuparea Liovului de către trupele naziste, în iunie 1941, Banach a trăit în condiţii dificile. A fost arestat sub învinuirea de trafic de valuta germană pentru câteva săptămîni. A supravieţuit unei perioade în care membrii Academiei Poloneze erau omorâţi (conducătorul său de doctorat, Lomnicki a murit în tragica noapte de 3 iulie 1941). Se îmbolnăveşte şi moare la Lwow la data de 31 august 1945.

Banach a fondat analiza funcţională modernă şi a avut contribuţii majore la dezvoltarea teoriei spaţiilor vectoriale topologice. În teza sa de doctorat din 1920 a definit axiomatic ceea ce astăzi numim spaţii Banach. Această idee a fost introdusă şi de către alţi matematicieni aproape în acelaşi timp (de exemplu de către Wiener), dar aceştia nu au dezvoltat teoria. Numele de spaţii Banach se datorează lui Fréchet. Importanţa operei lui Banach constă în faptul că a dezvoltat o teorie sistematică a analizei funcţionale, având drept bază lucrările lui Volterra, Fredholm şi Hilbert în domeniul ecuaţiilor integrale.

Banach este autorul unor rezultate fundamentale privind spaţiile vectoriale normate (teorema Hahn-Banach, principiul mărginirii uniforme (Banach-Steinhaus), teorema aplicaţiei deschise etc). Paradoxul Banach-Tarski (o sferă poate fi împărţită în două submulţimi care pot fi combinate astfel încât să rezulte două sfere, fiecare identică cu cea iniţială), a cărui demonstraţie foloseşte axioma alegerii, a determinat mulţi matematicieni să se întrebe dacă utilizarea amintitei axiome este legitimă, fiind o contribuţie majoră la dezvoltarea teoriei axiomatice a mulţimilor.

Notă istorică. *Renato Caccioppoli* s-a născut în 1904 la Napoli, Italia.

De la Universitatea din Napoli obţine licenţa în matematică, în anul 1925, fiind influenţat de Mario Picone, al cărui asistent devine în acelaşi an. Cu o mică întrerupere (când va preda la Universitatea din Padova) şi-a desfăşurat întreaga activitate la Universitatea din Napoli. Având convingeri antifasciste (era nepotul lui Bakunin), îşi exprimă cu ocazia vizitei lui Hitler şi Mussolini la Napoli, în mai 1938, opoziţia faţă de aceştia, ceea ce conduce la arestarea sa. Pentru a evita un proces, beneficiind de ajutorul mătuşii sale Maria Bakunin, care era profesoară de chimie la Universitatea din Napoli, este declarat nebun şi internat într-un azil. După cel de al doilea război mondial îşi reia activitatea ştiinţifică şi este ales membru al Accademia dei Lincei. Se alătură Partidului Comunist Italian, deşi nu împărtăşeşte întru totul politica acestuia. Ultimii săi ani de viaţă sunt trişti: este dezamăgit din punct de vedere politic, simte că inspiraţia matematică îl părăseşte şi divorţeză de soţie. Devine alcoolic şi izolat. Se împuşcă pe 8 mai 1959. Caccioppoli, un excelent pianist, a avut contribuţii însemnate la dezvoltarea analizei matematice, a calculului variaţional, a ecuaţiilor diferenţiale. În articolul Misura e integrazione degli insiemi dimensionalmente orientati, apărut în Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, introduce noţiunea de mulţimi de parametru finit, mulţimi cunoscute astăzi sub numele de mulţimi Caccioppoli.

Rezultatul de prezentat mai jos, anume Principiul contracţiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli, este un instrument fundamental în stabilirea existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

Pentru început vom prezenta câteva noţiuni care ne vor permite formularea principiului mai sus amintit şi care au o mare însemnătate în sine.

Definiţie. *Se numeşte metrică pe mulţimea X o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ care satisface următoarele condiţii:*

1)

$$d(x, y) = 0$$

dacă şi numai dacă

$$x = y.$$

2)

$$d(x, y) = d(y, x),$$

pentru orice $x, y \in X$.

3)
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$
pentru orice $x, y, z \in X$.

Definiţie. *Se numeşte spaţiu metric un dublet (X, d), unde d este o metrică pe mulţimea X. Când nu va fi pericol de confuzie, vom omite d din această definiţie.*

Definiţie. *Şirul $(x_n)_n$ din spaţiul metric (X, d) se numeşte convergent dacă există $x \in X$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ implică $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

Definiţie. *Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ din spaţiul metric (X, d) se numeşte Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ implică $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Definiţie. *Un spaţiu metric se numeşte complet dacă orice şir Cauchy de elemente din spaţiul respectiv este convergent.*

Definiţie. *O funcţie $f : X \to X$, unde (X, d) este un spaţiu, se numeşte contracţie dacă există $C \in (0, 1)$, astfel încât*
$$d(f(x), f(y) \leq Cd(x, y),$$
pentru orice $x, y \in X$.

Principiul contracţiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o contracţie. Atunci f are un unic punct fix.*

Observaţie. *Demonstraţia acestui principiu, deci şi modul de obţinere al punctului fix, este similară cu cea a teoremei punctelor fixe pentru contracţii.*

Teorema de mai jos este un rezultat fundamental în teoria punctelor fixe, cerinţele asupra proprietăţilor funcţiei f fiind mult restrânse.

Teorema de punct fix a lui Brouwer. *Fie $B > 0$ şi $D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\}$. Atunci orice funcţie continuă $f : D \to D$ are cel puţin un punct fix.*

Notă istorică. *L.E.J. Brouwer* (1881-1966) a studiat şi a fost profesor la Amsterdam (din 1912, cu susţinerea lui Hilbert). A avut contribuţii la topologie, logică şi fundamentele matematicii. Teza de doctorat a lui Brouwer, publicată în 1907, a constituit o contribuţie majoră la disputa dintre Russell şi Poincaré privitoare la fundamentele matematicii. Din 1912 a devenit membru al Academiei Regale de Ştiinţe din Olanda, iar apoi al Royal Society of London, al Academiei de Ştiinţe din Berlin şi al Academiei de Ştiinţe din Göttingen. A fost membru al comitetului de redacţie al revistei Mathematische Annalen.

Pentru o demonstraţie a Teoremei lui Brouwer, bazată pe noţiuni elementare, se poate consulta **N. Dunford** şi **J.T. Schwartz**, Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1960.

Exerciţii

1. Daţi exemplu de o funcţie continuă $f : (0,1) \to (0,1)$ care nu are puncte fixe.

2. Să se aplice rezultatele anterioare pentru calculul aproximativ al soluţiilor ecuaţiei

$$10x - 1 = \sin x.$$

3. Să se calculeze $\sqrt{10}$ cu o aproximaţie de 10^{-4}.

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Un punct $u \in D$ se numeşte punct fix, al lui f, dacă $f(u) = u$.

Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o contracţie. Atunci f are un unic punct fix.

Fie o contracţie $f : D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\} \to \mathbb{R}^q$, având constanta C, astfel încât $\|f(0)\| \leq B(1-C)$. Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit astfel: $x_1 = 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge către un unic punct fix al lui f, care se găseşte în D.

Fie $B > 0$ şi $D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\}$. Atunci orice funcţie continuă $f : D \to D$ are cel puţin un punct fix.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

TEOREME DE APROXIMARE

Noţiunea de aproximare uniformă a unei funcţii cu o altă funcţie
Noţiunea de funcţie în scară. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue cu funcţii în scară
Noţiunea de funcţie liniară pe porţiuni. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue cu funcţii liniare pe porţiuni
Polinoamele Bernstein
Teorema lui Bernstein
Teorema Stone-Weierstrass

Ideea fundamentală pe care se sprijină construcţia lui Weierstrass pentru $\mathbb{R}$ este aproximarea cu numere mai simple, anume cu cele raţionale. Acest lucru este ilustrat de faptul următor: pentru $\sqrt{2}$ (care este una dinte soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2 = 0$) nu se poate specifica în mod concret o valoare a sa; se poate aproxima această valoare cu o acurateţe oricât de bună cu ajutorul numerelor raţionale.

Situaţia în cazul funcţiilor este complet similară. În general, funcţiile care sunt definite ca soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale nu se pot scrie, folosind un număr finit de operaţii algebrice elementare, ca expresii de funcţii elementare. Se pot obţine însă aproximaţii ale lor oricât de bune. Aşadar, din punctul de vedere al aplicaţiilor, este necesar, de multe ori, să se aproximeze funcţiile continue cu funcţii mai simple. Mai mult, pentru multe dintre funcţiile elementare, ca de exemplu sin, cos, exp, ln, etc, în calculele practice, facem apel, de fapt, la aproximaţii ale lor. Spre exemplu, atunci când se apasă tasta e^x a unui calculator, răspunsul generat de acesta nu este exact e^x, ci o aproximare a sa.

Deşi există mai multe moduri rezonabile de a defini noţiunea de aproximare, cea mai naturală şi mai importantă este cea în care se cere ca, în fiecare punct al domeniului de definiţie, valoarea funcţie de aproximare să nu difere de valoare funcţiei date cu mai mult de o valoare prestabilită.

Este vorba aici de aproximarea uniformă care este strâns legată de convergenţa uniformă.

Principalul rezultat din această secţiune afirmă că orice funcţie reală continuă poate fi aproximată, pe un interval compact al axei reale, oricât de bine

dorim, cu polinoame. Polinoamele sunt funcţii uşor de controlat (ele sunt complet determinate de mulţimea finită a coeficienţilor lor); ele joacă pentru aproximarea funcţiilor continue, rolul pe care îl joacă numerele raţionale pentru aproximarea numerelor reale.

Noţiunea de aproximare uniformă a unei funcţii cu o altă funcţie

Definiţie. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. *Spunem că* g *aproximează uniform pe* f, *pe* D, *cu eroarea* $\varepsilon > 0$, *dacă*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D$, *adică dacă*

$$\|f - g\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in D} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

Spunem că funcţia f *poate fi aproximată, pe* D, *cu funcţii din clasa* $\mathcal{A}$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $g_\varepsilon \in \mathcal{A}$, *astfel încât*

$$\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

sau, echivalent, există un şir de funcţii din $\mathcal{A}$, *care converge uniform către* f, *pe* D.

Noţiunea de funcţie în scară. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue cu funcţii în scară

Definiţie. *O funcţie* $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *se numeşte funcţie în scară, dacă ia numai un număr finit de valori distincte, iar orice valoare nenulă este luată pe un interval din* $\mathbb{R}^p$.

De exemplu, pentru $p = q = 1$, funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \leq -2 \\ 1, & -2 < x \leq 0 \\ 3, & 0 < x < 1 \\ -5, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{array} \right.$$

este o funcţie în scară.

Folosind Teorema continuităţii uniforme se demonstrează următoarea

Teoremă. *O funcţie continuă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde D este un interval compact din $\mathbb{R}^p$, poate fi aproximată uniform cu funcţii în scară.*

Noţiunea de funcţie liniară pe porţiuni. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue cu funcţii liniare pe porţiuni

Este de aşteptat ca funcţiile continue să fie aproximate uniform cu funcţii mai simple care sunt continue (funcţiile în scară nu sunt continue).

Definiţie. *O funcţie $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se numeşte liniară pe porţiuni, dacă există $c_0, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n = b$ şi numerele reale $A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n$ astfel încât să avem*

$$g(x) = A_k x + B_k,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi pentru orice $x \in [c_k, c_{k+1}]$

Observaţie. *Bineînţeles că pentru ca g să fie continuă, numerele reale A_k şi B_k trebuie să îndeplinească anumite relaţii.*

Folosind Teorema continuităţii uniforme se demonstrează următoarea

Teoremă. *O funcţie continuă, $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde J este un interval compact, poate fi aproximată uniform cu funcţii continue liniare pe porţiuni.*

Polinoamele Bernstein

Definiţie. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Polinomul Bernstein de ordin n, asociat funcţiei f, este definit prin*

$$B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Notă istorică. *Serge N. Bernstein* (1880-1968), matematician rus, a avut contribuţii însemnate la dezvoltarea analizei matematice, teoriei aproximării şi teoriei probabilităţilor. S-a născut la Odesa. A absolvit liceul în

1898. Apoi merge la Paris unde studiază la Sorbona şi la École d'Electrotechnique Supérieure. Între 1902 şi 1903 se află la Göttingen. Obţine titlul de doctor în matematici de la Sorbona, în anul 1904, cu o teză în care rezolvă cea de a 19-a problemă din lista lansată de către Hilbert la congresul matematicienilor din 1900. La întoarcerea în Rusia este nevoit să se înroleze într-un nou program doctoral deoarece autorităţile ruse nu recunoşteau, pentru posturile din învăţămîntul superior gradele obţinute în străinătate. Obţine titlul de doctor de la Universitatea din Harkov, cu o teză în care rezolvă cea de a 20-a problemă din lista menţionată anterior. Va preda la această universitate până în 1933, an în care începe să predea la Universitatea din Leningrad (timp în care activează şi în cadrul Academiei de Ştiinţe a URSS). Din 1943 va preda la Universitatea din Moscova. A avut rezultate remarcabile în teoria aproximării funcţiilor şi în teoria probabilităţilor (pe care a încercat, în 1917, să o axiomatizeze).

Observaţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0,1]$, avem:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Înlocuind n cu $n-1$ şi k cu j, avem:

$$1 = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j (1-x)^{n-1-j},$$

de unde, prin înmulţirea cu x şi folosirea relaţiei

$$C_{n-1}^j = \frac{j+1}{n} C_n^{j+1},$$

avem

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} C_n^{j+1} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)},$$

de unde, notând $j+1$ cu k, obţinem

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

adică

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2}$$

Un calcul similar, bazat pe formula (1) (unde se înlocuieşte n cu $n-2$) şi pe

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} C_n^k,$$

ne furnizează

$$(n^2-n)x^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Prin urmare, avem

$$(1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x = \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{3}$$

Înmulţind (1) cu x^2, (2) cu $-2x$, şi adunând cu (3), obţinem

$$\frac{1}{n}x(1-x) = \sum_{k=0}^{n} (x-\frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{4}$$

relaţie ce va fi folosită ulterior.

Să remarcăm că relaţia (1) spune că polinomul Bernstein de ordin n, pentru funcţia f_0, dată de $f_0(x) = 1$, coincide cu f_0, iar relaţia (2) spune acelaşi lucru pentru funcţia f_1, dată de $f_1(x) = x$. Formula (3) arată că polinomul Bernstein, de ordin n, pentru funcţia f_2, dată de $f_2(x) = x^2$, este

$$B_n(x; f_2) = (1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x,$$

care converge uniform către f_2.

Vom arăta în continuare că acest fapt este valabil pentru orice funcţie continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Teorema lui Bernstein

Teorema de aproximare a lui Bernstein. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, şirul polinoamelor Bernstein, asociate lui f, converge uniform către f.*

Demonstraţie. Deoarece, din (1), avem

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

obţinem

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\{f(x)-f(\frac{k}{n})\}C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

de unde

$$|f(x)-B_n(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (*)$$

Funcţia f este mărginită, deci există $M\in\mathbb{R}$, astfel ca

$$|f(x)|\leq M,$$

pentru orice $x\in[0,1]$.

Deoarece funcţia f este uniform continuă (fiind continuă pe mulţimea compactă $[0,1]$) , deducem că pentru orice $\varepsilon>0$, există $\delta_\varepsilon>0$, astfel ca pentru orice $x,y\in[0,1]$, cu $|x-y|<\delta_\varepsilon$, să avem

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel ca

$$n\geq\max\{\frac{1}{\delta_\varepsilon^4},\frac{M^2}{4\varepsilon^2}\}. \qquad (**)$$

Pentru partea din suma ce apare în membrul drept al inegalităţii (*) la care participă acei k cu proprietatea că

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\leq\delta_\varepsilon,$$

avem majorarea

$$\sum_{k} \varepsilon C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon.$$

Pentru partea din suma ce apare în membrul drept al inegalităţii (*) la care participă acei k cu proprietatea că

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}},$$

adică cu proprietatea că

$$(x - \frac{k}{n})^2 \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

avem, folosind (4), majorarea

$$\sum_{k} 2M C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 2M \sum_{k} \frac{(x-\frac{k}{n})^2}{(x-\frac{k}{n})^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k} (x - \frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= 2M\sqrt{n} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{M}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon,$$

deoarece, pentru orice $x \in [0,1]$, avem

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Ca atare

$$|f(x) - B_n(x)| \leq 2\varepsilon,$$

pentru orice $x \in [0,1]$, adică

$$B_n(x) \xrightarrow{u} f,$$

pe $[0,1]$. $\square$

Corolar. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există un şir de polinoame care converge uniform către f.*

Demonstraţie. Se aplică teorema de mai sus funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$g(t) = f((b - a)t + a),$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. $\square$

Teorema Stone-Weierstrass

Teorema de aproximare a lui Bernstein stă la baza demonstraţiei următorului rezultat (care se poate demonstra şi fără a se face apel la teorema lui Bernstein):

Teorema Stone-Weierstrass. *Fie $K \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime compactă şi $\mathcal{A}$ o familie de funcţii continue cu domeniul K şi codomeniul $\mathbb{R}$, având următoarele proprietăţi:*

a) funcţia e, dată de $e(x) = 1$, pentru orice $x \in K$, aparţine lui $\mathcal{A}$.

b) dacă f şi g aparţin lui $\mathcal{A}$, atunci $\alpha f + \beta g$ aparţine lui $\mathcal{A}$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

c) dacă f şi g aparţin lui $\mathcal{A}$, atunci fg aparţine lui $\mathcal{A}$.

d) pentru orice $x \neq y \in K$, există $f \in \mathcal{A}$, astfel ca $f(x) \neq f(y)$.

Atunci, pentru orice funcţie continuă $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ există un şir de funcţii din $\mathcal{A}$, care converge uniform către f.

Notă istorică. *Marshall N. Stone* (1903-1989) a studiat la Harvard (între 1919 şi 1922). Obţine titlul de doctor în matematică în 1926 cu o teză elaborată sub îndrumarea lui Birkhoff. A fost profesor la Columbia University, Harvard University, Yale University, iar din 1946 a fost decanul Departamentului de Matematică de la Chicago University. A avut contribuţii însemnate la dezvoltarea analizei matematice, în special la teoria spaţiilor Hilbert şi a algebrelor Booleene.

Observaţie. *Teorema de aproximare a lui Bernstein are marele avantaj (spre deosebire de Teorema Stone-Weierstrass) de a furniza o metodă constructivă pentru obţinerea unui şir de polinoame care converge uniform către funcţia continuă considerată. În plus, cu ajutorul relaţiei (**) putem estima şi viteza de convergenţă.*

Exerciţiu. Fie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. K poate fi parametrizat cu ajutorul unghiului $\theta \in [0, 2\pi]$, unde $tg\theta = \frac{y}{x}$. O funcţie $p : K \to \mathbb{R}$, de forma

$$p(\theta) = A_0 + (A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta) + ... + (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

pentru orice $\theta \in [0, 2\pi]$, unde $A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n$ sunt numere reale, se numeşte polinom trigonometric.

Să se arate că orice funcţie continuă $f : K \to \mathbb{R}$ poate fi aproximată uniform cu polinoame trigonometrice.

REZUMAT

Fie f, $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Spunem că g aproximează uniform pe f, pe D, cu eroarea $\varepsilon > 0$, dacă $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$, pentru orice $x \in D$, adică dacă $\|f - g\| = \sup\limits_{x \in D} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$. Spunem că funcţia f poate fi aproximată, pe D, cu funcţii din clasa A, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $g_\varepsilon \in A$, astfel încât $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$, sau, echivalent, există un şir de funcţii din A, care converge uniform către f, pe D.

O funcţie $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se numeşte funcţie în scară, dacă ia numai un număr finit de valori distincte, iar orice valoare nenulă este luată pe un interval din $\mathbb{R}^p$.

O funcţie continuă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde D este un interval compact din $\mathbb{R}^p$, poate fi aproximată uniform cu funcţii în scară.

O funcţie $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte liniară pe porţiuni dacă există $c_0, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n = b$ şi numerele reale $A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n$ astfel încât să avem $g(x) = A_k x + B_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi pentru orice $x \in [c_k, c_{k+1}]$.

O funcţie continuă $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde J este un interval compact, poate fi aproximată uniform cu funcţii continue liniare pe porţiuni.

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Polinomul Bernstein de ordin n, asociat funcţiei f, este definit prin $B_n(x) = B_n(x; f) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, şirul polinoamelor Bernstein, asociate lui f, converge uniform către f.

Fie $K \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime compactă şi A o familie de funcţii continue cu domeniul K şi codomeniul $\mathbb{R}$, având următoarele proprietăţi:

a) funcţia e, dată de $e(x) = 1$, pentru orice $x \in K$, aparţine lui A.

b) dacă f şi g aparţin lui A, atunci $\alpha f + \beta g$ aparţine lui A, pentru orice $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

c) dacă f şi g aparţin lui A, atunci fg aparţine lui A.

d) pentru orice $x \neq y \in K$, există $f \in A$, astfel ca $f(x) \neq f(y)$.

Atunci pentru orice funcţie continuă $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, există un şir de funcţii din A, care converge uniform către f.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

EXTINDEREA FUNCŢIILOR CONTINUE

Existenţa unei funcţii continue care ia valori prestabilite pe două mulţimi închise disjuncte
Teorema lui Tietze

Uneori este de dorit să se extindă domeniul unei funcţii continue fără a schimba valorile funcţiei pe domeniul ei iniţial. Acest lucru poate fi realizat într-un mod trivial, definind funcţia prin valoarea 0 în afara domeniului ei iniţial de definiţie. Această metodă nu generează, de regulă, o extindere continuă. De fapt, aşa cum se vede considerând funcţia $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, uneori nu există o extindere continuă. Totuşi, aşa cum vom vedea mai jos, o extindere continuă există întotdeauna dacă domeniul iniţial de definiţie este o mulţime închisă. Mai mult, marginile extinderii se află între marginile funcţiei iniţiale.

Existenţa unei funcţii continue care ia valori prestabilite pe două mulţimi închise disjuncte

Observaţie. *Fie A şi B două submulţimi închise ale lui $\mathbb{R}^p$, astfel ca*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definim

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|$$

şi $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, prin

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Atunci φ este continuă şi are următoarele proprietăţi:

$$\varphi_{|A} = 0,$$

$$\varphi_{|B} = 1$$

şi

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Teorema lui Tietze

Teorema lui Tietze, într-o formă mai generală decât cea prezentată mai jos, este un instrument des utilizat în studiul proprietăţilor de separare ale spaţiilor topologice, anume în caracterizarea spaţiilor topologice normale.

Teorema lui Tietze. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi mărginită, unde* D *este o mulţime închisă. Atunci există o funcţie continuă* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$g_{|D} = f$$

şi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| = \sup_{x \in D} |f(x)| .$$

Notă istorică. *Heinrich Tietze* (1880-1964) a fost profesor la München şi a avut contribuţii însemnate în topologie, geometrie şi algebră. Teorema de mai sus a fost demonstrată în 1914. Tatăl lui Tietze a fost directorul Institutului Geologic al Universităţii din Viena. Tietze a studiat, începând cu 1898, la Technische Hochschule din Vienna (unde devine prieten, printre alţii, cu Hahn). Obţine titlul de doctor, în 1904, de la Universitatea din Viena, sub îndrumarea lui Gustav von Escherich. A fost profesor la Brno, Erlangen şi München. A fost membru al Academiei de Ştiinţe din Bavaria, al Royal Society of London şi al Academiei de Ştiinţe din Austria.

Demonstraţie. Fie

$$M = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

şi mulţimile închise

$$A_1 = \{x \in D \mid f(x) \leq -\frac{M}{3}\}$$

şi

$$B_1 = \{x \in D \mid f(x) \geq \frac{M}{3}\}.$$

Atunci, folosind observaţia anterioară, deducem existenţa unei funcţii continue $\varphi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi_{1|A_1} = -\frac{M}{3},$$

$$\varphi_{1|B_1} = \frac{M}{3}$$

şi

$$-\frac{M}{3} \leq \varphi_1(x) \leq \frac{M}{3},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Funcţia $f_2 = f - \varphi_1$ este continuă şi

$$\sup_{x \in D} |f_2(x)| \leq \frac{2}{3} M.$$

Fie acum

$$A_2 = \{x \in D \mid f(x) \leq -\frac{2}{3}\frac{M}{3}\}$$

şi

$$B_2 = \{x \in D \mid f(x) \geq \frac{2}{3}\frac{M}{3}\}.$$

Atunci folosind din nou observaţia anterioară, deducem existenţa unei funcţii continue $\varphi_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi_{2|A_2} = -\frac{2}{3}\frac{M}{3},$$

$$\varphi_{2|B_2} = \frac{2}{3}\frac{M}{3}$$

şi

$$-\frac{2}{3}\frac{M}{3} \leq \varphi_2(x) \leq \frac{2}{3}\frac{M}{3},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Funcţia $f_3 = f_2 - \varphi_2 = f - \varphi_1 - \varphi_2$ este continuă şi

$$\sup_{x \in D} |f_3(x)| \leq (\frac{2}{3})^2 M.$$

Procedând ca mai sus, obţinem un şir de funcţii continue, $\varphi_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - (\varphi_1(x) + ... + \varphi_n(x))| \leq (\frac{2}{3})^n M, \tag{*}$$

pentru orice $x \in D$, şi

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} M, \tag{**}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Definim, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcţia continuă $g_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, prin

$$g_n = \varphi_1 + ... + \varphi_n.$$

Atunci, pentru orice m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, şi $x \in \mathbb{R}^p$, avem

$$|g_m(x) - g_n(x)| = \left|\varphi_{n+1}(x) + ... + \varphi_m(x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n M(1 + \frac{2}{3} + ... + (\frac{2}{3})^{m-n-1}) \leq (\frac{2}{3})^n M,$$

relaţie care arată, folosind Criteriul lui Cauchy pentru convergenţă uniformă, că şirul $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către o funcţie ce va fi notată cu g.

Cum funcţiile g_n sunt continue, g este funcţie continuă.

De asemenea, din (*), rezultă că

$$|f(x) - g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n M,$$

pentru orice $x \in D$, deci

$$g_{|D} = f.$$

Mai mult, din (**), deducem că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in \mathbb{R}^p$, avem

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} M(1 + \frac{2}{3} + ... + (\frac{2}{3})^{n-1}) \leq M,$$

de unde

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^p} |g(x)| \leq \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Inegalitatea

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^p} |g(x)| \geq \sup_{x\in D} |f(x)|$$

fiind evidentă, avem

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^p} |g(x)| = \sup_{x\in D} |f(x)|. \ \square$$

REZUMAT

Fie A şi B două submulţimi închise ale lui $\mathbb{R}^p$, astfel ca $A \cap B = \emptyset$. Definim $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|y - x\|$ şi $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, prin $\varphi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$. Atunci φ este continuă, $\varphi_{|A} = 0$, $\varphi_{|B} = 1$ şi $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi mărginită, unde D este o mulţime închisă. Atunci există o funcţie continuă $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel ca $g_{|D} = f$ şi $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *James Munkres*, **TOPOLOGY A first course,** Prentice Hall, 1975.

ECHICONTINUITATE

Noţiunea de familie mărginită de funcţii continue
Echicontinuitatea unei familii de funcţii
Teorema Arzelà-Ascoli

Am folosit de multe ori până acum teorema lui Bolzano-Weierstrass (orice mulţime infinită şi mărginită din $\mathbb{R}^p$ are un punct de acumulare) şi rezultatul corespunzător pentru şiruri, anume lema lui Cesaro (orice şir mărginit din $\mathbb{R}^p$ are un subşir convergent). Vom prezenta acum un rezultat analog pentru mulţimi de funcţii continue. Pentru simplitate, vom prezenta aici numai forma referitoare la şiruri, deşi se pot defini şi pentru funcţii noţiunile de vecinătate, mulţime deschisă şi închisă, punct de acumulare etc.

Noţiunea de familie mărginită de funcţii continue

Fie K o mulţime compactă fixată din $\mathbb{R}^p$.
Pentru o funcţie continuă $f : K \to \mathbb{R}^q$ definim

$$\|f\| = \|f\|_K \overset{def}{=} \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Definiţie. *Familia $\mathcal{A}$ de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, se numeşte mărginită (sau uniform mărginită) dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\|f\| \leq M,$$

pentru orice $f \in \mathcal{A}$.

Observaţie. *Este clar că orice famile finită $\mathcal{A}$ este mărginită. În general, o familie infinită nu este mărginită. Totuşi, un şir uniform convergent de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, este mărginit.*

Mai precis avem:

Lemă. *Dacă $\mathcal{A} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $f_n : K \to \mathbb{R}^q$, este un şir uniform convergent de funcţii continue, atunci $\mathcal{A}$ este mărginită.*

Echicontinuitatea unei familii de funcţii

Observaţie. *Dacă* $f : K \to \mathbb{R}^q$ *este o funcţie continuă, ea este uniform continuă şi ca atare, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca pentru orice* $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$, *avem*

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Desigur valoarea lui δ_ε *depinde şi de* f, *deci, pentru a fi mai exacţi, ar trebui să scriem* $\delta_{\varepsilon,f}$ *(când lucrăm cu mai mult de o funcţie este nimerit să punem în evidenţă acest fapt).*

Dacă $\mathcal{A} = \{f_1, ..., f_n\}$ *este o famile finită de funcţii continue, din* K *în* $\mathbb{R}^q$, *atunci considerând*

$$\delta_{\varepsilon,\mathcal{A}} = \min\{\delta_{\varepsilon,f_1}, ..., \delta_{\varepsilon,f_n}\} > 0,$$

obţinem un δ *"valabil" pentru toate funcţiile din* $\mathcal{A}$.

Definiţie. *Familia* $\mathcal{A}$ *de funcţii, din* K *în* $\mathbb{R}^q$, *se numeşte echicontinuă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca, pentru orice* $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ *şi orice funcţie* $f \in \mathcal{A}$, *să avem*

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Observaţie. *Spunem că familia* $\mathcal{A}$ *de funcţii, din* K *în* $\mathbb{R}^q$, *are proprietatea* $(*)$ *dacă pentru orice* $x \in K$ *şi orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ *astfel ca pentru orice* $y \in K$, $\|y - x\| < \delta_{x,\varepsilon}$ *şi orice funcţie* $f \in \mathcal{A}$, *să avem*

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Dacă familia $\mathcal{A}$ *are proprietatea* $(*)$, *atunci ea este echicontinuă.*

Mulţi autori adoptă ca definiţie a echicontinuităţii proprietatea $(*)$.

Observaţie. *Considerentele de mai sus arată că orice famile finită de funcţii continue, din* K *în* $\mathbb{R}^q$, *este echicontinuă.*

Vom arăta că orice şir uniform convergent de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, este, de asemenea, echicontinuu.

Mai precis avem:

Lemă. *Dacă* $\mathcal{A} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, unde* $f_n : K \to \mathbb{R}^q$*, este un şir uniform convergent de funcţii continue, atunci* $\mathcal{A}$ *este echicontinuă.*

Teorema Arzelà-Ascoli.

Cele discutate mai sus arată că pentru ca un şir de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, să fie uniform convergent, este necesar ca el să fie mărginit şi echicontinuu.

Vom arăta că aceste două proprietăţi sunt necesare şi suficiente pentru ca o familie $\mathcal{A}$ de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, să aibă proprietatea că orice şir de funcţii din $\mathcal{A}$ posedă un subşir uniform convergent.

Teorema Arzelà-Ascoli este un instrument fundamental în stabilirea existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare, precum şi în studiul compacităţii operatorilor integrali (care se vor studiu în cadrul cursului de analiză funcţională).

Teorema Arzelà-Ascoli. *Fie* K *o mulţime compactă din* $\mathbb{R}^p$ *şi* $\mathcal{A}$ *o familie de funcţii continue din* K *în* $\mathbb{R}^q$*.*

Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathcal{A}$ *este mărginită şi echicontinuă.*

b) orice şir de elemente din $\mathcal{A}$ *posedă un subşir uniform convergent.*

Notă istorică. *Cesare Arzelà* (1847-1912) a absolvit Universitatea din Pisa, în 1869. A fost profesor la Universitatea din Palermo şi la cea din Bologna.

Notă istorică. *Guido Ascoli* (1887-1957) a fost profesor la Milano şi Torino.

Demonstraţie.

b)$\Rightarrow$a)

Vom arăta că $\rceil$a)$\Rightarrow\rceil$b).

Dacă $\mathcal{A}$ este nemărginită, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $f_n \in \mathcal{A}$ astfel ca

$$\|f_n\| \geq n.$$

Conform primei leme de mai sus, nici un subşir al lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu poate fi uniform convergent, deci avem $\rceil$b).

Dacă $\mathcal{A}$ nu este echicontinuă, atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n, y_n \in K$, cu proprietatea că

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

şi $f_n \in \mathcal{A}$ cu proprietatea că

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \geq \varepsilon_0.$$

Dacă şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ar avea un subşir uniform convergent, atunci, conform celei de a doua leme de mai sus, acest subşir ar fi echicontinuu, ceea ce ar contrazice afirmaţia de mai sus.

Deci avem $\rceil$b).

a)$\Rightarrow$b)

Vom arăta că orice şir de funcţii, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathcal{A}$, posedă un subşir uniform convergent.

Conform exerciţiului 9 de la pagina ..., există C o submulţime numărabilă a lui K cu proprietatea că pentru orice $y \in K$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un element $x \in C$ astfel ca

$$\|x - y\| < \varepsilon. \tag{*}$$

Dacă $C = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, atunci $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$, deci conform lemei lui Cesaro, există un subşir

$$(f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), ..., f_{1n}(x_1), ...)$$

al lui $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ care este convergent.

Să remarcăm acum că şirul $(f_{1k}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$, deci există un subşir

$$(f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), ..., f_{2n}(x_2), ...)$$

al său care este convergent.

Să remarcăm, în continuare, că şirul $(f_{2k}(x_3))_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit din $\mathbb{R}^p$, deci există un subşir

$$(f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), ..., f_{3n}(x_3), ...)$$

al său care este convergent.

Procedeul se repetă şi definim $g_n = f_{nn}$ ca fiind a n-a funcţie din cel de al n-lea subşir.

Din construcţie este clar că şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în orice punct din C.

Vom arăta acum că şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în orice punct din K şi că avem convergenţă uniformă.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ şi orice funcţie $f \in \mathcal{A}$ să avem

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Folosind faptul că mulţimea K este compactă, precum şi faptul că familia $(B(x, \delta_\varepsilon))_{x\in C}$ constituie o acoperire cu mulţimi deschise a lui K (vezi $(*)$), putem considera

$$C_1 = \{y_1, ..., y_k\}$$

o submulţime finită a lui C astfel încât pentru orice $x \in K$ există $i \in \{1, 2, ..., k\}$, astfel ca

$$\|x - y_i\| < \delta_\varepsilon.$$

Deoarece şirurile $(g_n(y_1))_{n\in\mathbb{N}}$,...,$(g_n(y_k))_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente, există $M \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n, m \geq M$, să avem

$$\|g_m(y_i) - g_n(y_i)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Fie $x \in K$ arbitrar.

Atunci există $i \in \{1, 2, ..., k\}$ astfel ca

$$\|x - y_i\| < \delta_\varepsilon,$$

deci

$$\|g_n(x) - g_n(y_i)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, în particular pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq M$.

Ca atare avem

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(y_i)\| + \|g_n(y_i) - g_m(y_i)\| + \|g_m(x) - g_m(y_i)\| < 3\varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq M$, fapt care arată, folosind criteriul lui Cauchy pentru convergenţa uniformă, că şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (care este un subşir al lui este $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) este uniform convergent în orice punct din K. $\square$

REZUMAT

Fie K o mulţime compactă din $\mathbb{R}^p$, fixată. Pentru o funcţie continuă, $f: K \to \mathbb{R}^q$, definim $\|f\| = \|f\|_K = \sup_{x\in K} \|f(x)\|$.

Familia $\mathcal{A}$ de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$, se numeşte mărginită (sau uniform mărginită) dacă există $M \in \mathbb{R}$, astfel ca $\|f\| \leq M$, pentru orice $f \in A$.

Dacă $\mathcal{A} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : K \to \mathbb{R}^q$, este un şir uniform convergent de funcţii continue, atunci $\mathcal{A}$ este mărginită.

Familia $\mathcal{A}$ de funcţii, din K în $\mathbb{R}^q$, se numeşte echicontinuă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ şi orice funcţie $f \in \mathcal{A}$, avem $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Dacă $\mathcal{A} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : K \to \mathbb{R}^q$, este un şir uniform convergent de funcţii continue, atunci $\mathcal{A}$ este echicontinuă.

Fie K o mulţime compactă din $\mathbb{R}^p$ şi $\mathcal{A}$ o familie de funcţii continue, din K în $\mathbb{R}^q$. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) $\mathcal{A}$ este mărginită şi echicontinuă; b) orice şir de funcţii, din $\mathcal{A}$, posedă un subşir uniform convergent.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *James Munkres*, **TOPOLOGY A first course,** Prentice Hall, 1975.

LIMITE DE FUNCŢII

Limita unei funcţii de mai multe variabile într-un punct
Limite la infinit şi limite infinite
Limita superioară şi inferioară. Oscilaţia
Limite laterale. Discontinuităţi de prima şi de a doua speţă
Limite fundamentale

Analiza Matematică poate fi caracterizată destul de exact ca fiind partea matematicii unde se face în mod sistematic uz de diferite concepte de limită. Printre motivele care au determinat introducerea acestui concept în cadrul prezentului curs abia acum, un rol central îl ocupă acela că în analiza matematică elementară se operează cu câteva tipuri de limite. Am discutat deja despre convergenţa şirurilor şi despre continuitate. În capitolele următoare va apărea noţiunea de limită în contextul prezentării noţiunilor de derivabilitate şi de integrabilitate. Toate acestea sunt cazuri particulare ale conceptului general de limită, concept care are un grad ridicat de abstractizare. Din acest motiv am ales ca iniţial să introducem şi să discutăm separat aceste noţiuni. Odată ce aceste noţiuni au fost înţelese şi asimilate, nu mai este atât de greu să se asimileze noţiunea abstractă de limită.

Limita unei funcţii de mai multe variabile într-un punct

Cadrul în care vom lucra în această secţiune este următorul:
se consideră o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, c **un punct de acumulare al lui** D şi $b \in \mathbb{R}^q$.

Definiţie. *Vom spune că f tinde către b, atunci când x tinde către c, dacă pentru orice vecinătate V, a lui b, există U, vecinătate a lui c, astfel încât*

$$f(x) \in V,$$

pentru orice $x \in (U \cap D) - \{c\}$.

Vom nota această situaţie prin:

$$f(x) \underset{x \to c}{\to} b.$$

Lemă. *În cadrul de mai sus, dacă* $b' \in \mathbb{R}^q$, $f(x) \underset{x\to c}{\to} b$ *şi* $f(x) \underset{x\to c}{\to} b'$, *atunci* $b = b'$.

Observaţie. *Valoarea* b, *unic determinată de proprietatea* $f(x) \underset{x\to c}{\to} b$, *poartă numele de limita lui* f, *atunci când* x *tinde către* c.

Vom marca această situaţie astfel:

$$\lim_{x\to c} f(x) = b.$$

Următorul rezultat prezintă formulări echivalente pentru existenţa limitei unei funcţii într-un punct.

Teoremă. *În cadrul de mai sus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) există $\lim_{x\to c} f(x)$ *şi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l.$$

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in D$, $x \neq c$ *astfel ca* $\|x - c\| < \delta_\varepsilon$, *avem*

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

c) pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de puncte din* D, *astfel ca* $x_n \neq c$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *avem*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Următorul rezultat precizează legătura dintre continuitate şi limită.

Teoremă. *În cadrul de mai sus, facem presupunerea suplimentară că* c *este punct al lui* D.

Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f *este continuă în* c.

b) *există* $\lim_{x\to c} f(x)$ *şi* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Teorema următoare prezintă comportamentul limitei la compunere.

Teoremă. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ *astfel ca* $Imf \subseteq D'$, c *un punct de acumulare al lui* D, $b \in \mathbb{R}^q$ *şi* $a \in \mathbb{R}^s$ *astfel încât:*

i)

$$\lim_{x \to c} f(x) = b$$

ii) există U, o vecinătate a lui c, astfel încât

$$f(x) \neq b,$$

pentru orice $x \in (U \cap D) - \{c\}$ (deci b este punct de acumulare pentru Imf).

iii)

$$\lim_{y \to b} g(y) = a.$$

Atunci există $\lim\limits_{x \to c} (g \circ f)(x)$ şi

$$\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = a.$$

Observaţie. *Condiţia ii) din această teoremă este esenţială, aşa cum arată exemplul următor:*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, pentru $x \neq 0$ şi $f(0) = 1$, $g = f$, $c = 0$.

Limite la infinit şi limite infinite

Ca şi în cazul şirulrilor, vom prezenta cazul limitelor infinite, respectin al limitelor la infinit.

Definiţie. *Fie $f : E \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de acumulare (în cazul $q = 1$, eventual infinit) al mulţimii $E \subseteq \mathbb{R}^q$. Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in (E \cap U) - \{x_0\}$, avem $f(x) \in V$.*

Această situaţie se marchează prin notaţia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Remarcă. 1. *Pentru $q = 1$,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

2. *Pentru* $q = 1$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in E$ *cu proprietatea*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

avem

$$f(x) < \varepsilon.$$

3.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *există* $\delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x \in E$ *cu proprietatea*

$$x > \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

4.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *există* $\delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x \in E$ *cu proprietatea*

$$x > \delta,$$

avem

$$f(x) < \varepsilon.$$

5.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *există* $\delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x \in E$ *cu proprietatea*

$$x < \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

6.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *există* $\delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x \in E$ *cu proprietatea*
$$x < \delta,$$
avem
$$f(x) < \varepsilon.$$

Observaţie. *Comportamentul limitelor de funcţii la operaţiile algebrice este similar celui din cazul şirurilor.*

Limita superioară şi inferioară. Oscilaţia

Vom presupune acum că $q = 1$. Aşadar se consideră o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi c un punct din D. Noţiunile prezentate mai jos, care sunt analogul noţiunilor de limită superioară şi inferioară de la şiruri, sunt utile pentru o caracterizare alternativă a continuităţii.

Definiţie. *Definim limita superioară a lui* f*, atunci când* x *tinde către* c, *prin*
$$\limsup_{x\to c} f(x) = \inf_{V \text{ vecinătate a lui } c} \left(\sup_{x\in D\cap V} f(x) \right).$$

Analog se defineşte noţiunea de limita inferioară a lui f *atunci când* x *tinde către* c, *care se notează prin* $\liminf\limits_{x\to c} f(x)$.

Definiţie. *Definim oscilaţia lui* f *pe o submulţime* A *a lui* D *ca fiind*
$$\omega(f, A) = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x,y\in A} (f(x) - f(y)),$$
iar oscilaţia lui f *în punctul* c *ca fiind*
$$\omega(f, c) = \inf_{V \textit{ vecinătate a lui } c} \omega(f, V \cap D).$$

Observaţie. *În cadrul de mai sus, avem*
$$\omega(f, c) = \limsup_{x\to c} f(x) - \liminf_{x\to c} f(x).$$

Propoziţie. *În cadrul de mai sus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) f *este continuă în* c*;*
ii)

$$\omega(f,c)=0;$$

iii)

$$\limsup_{x\to c} f(x)=\liminf_{x\to c} f(x)=f(c).$$

Exerciţii.

1. În cadrul de mai sus, să se arate că, pentru orice $\alpha>0$, mulţimea $\{x\in D \mid \omega(f,c)<\alpha\}$ este deschisă.

2. Fie $f_n, f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$. Să se arate că dacă, pentru orice $n\in N$, f_n este continuă, atunci mulţimea punctelor în care f este continuă este densă în $\mathbb{R}^p$.

Limite laterale. Discontinuităţi de prima şi de a doua speţă

În cazul funcţiilor de o variabilă reală se poate discuta despre noţiunile de limite laterale, ceea ce permite o anume clasificare a punctelor de discontinuitate.

Definiţie. *Fie* $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *şi* a *un punct de acumulare al lui* $A\cap(-\infty,a)$.

Vom spune că $l\in\overline{\mathbb{R}}$ *este limita la stânga a funcţiei* f *în punctul* a *dacă pentru orice vecinătate* V *a lui* l *există o vecinătate* U *a lui* a *astfel încât pentru orice*

$$x\in U,\ cu\ x<a,$$

avem

$$f(x)\in V.$$

Această situaţie se marchează prin

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$$

sau prin

$$f(a-)=l.$$

Analog se defineşte limita la dreapta a funcţiei f *în punctul* a.

Limita la stânga a funcţiei f în punctul a şi limita la dreapta a funcţiei f în punctul a se numesc limitele laterale ale funcţiei f în punctul a.

Rezultatul de mai jos caracterizează situaţia existenţei limitei unei funcţii într-un punct în termeni de limitele laterale.

Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare al lui A. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul a dacă şi numai dacă existele ambele laterale (care au sens) ale lui f în a şi sunt egale cu l.*

Noţiunea de limite laterale permite următoarea clasificare a punctelor de discontinuitate.

Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punct $a \in A$ se numeşte punct de discontinuitate de prima speţă dacă există şi sunt finite limitele laterale (care au sens) ale lui f în a, dar cel puţin una este diferită de $f(a)$. Celelalte puncte de discontinuitate din A se numesc puncte de discontinuitate de speţa a doua.*

Propoziţia următoare precizează natura şi cardinalul discontinuităţilor unei funcţii monotone.

Propoziţie. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Atunci discontinuităţile lui f sunt numai de prima speţă şi mulţimea acestora este cel mult numărabilă.*

Observaţie. *Alexandru Froda a demonstrat că mulţimea punctelor de discontinuitate de prima speţă ale oricărei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este cel mult numărabilă.*

Propoziţia următoare precizează natura discontinuităţilor unei funcţii cu proprietatea lui Darboux.

Propoziţie. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Atunci f nu are discontinuităţi de prima speţă.*

După cum am văzut, există funcţii cu proprietatea lui Darboux care nu sunt continue. Propoziţia următoare furnizează condiţii suficiente pentru ca o funcţie cu proprietatea lui Darboux să fie continuă.

Propoziţie. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f este continuă.*

Propoziţia următoare furnizează condiţii necesare şi suficiente pentru ca o funcţie sa realizeze un izomorfism între domeniul său de definiţie şi imaginea sa.

Propoziţie. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) $f : I \to f(I)$ este homeomorfism i.e. f este bijectivă, iar f şi f^{-1} sunt continue;
ii) f este strict monotonă şi $f(I)$ este interval
iii) f este continuă şi injectivă.

Aplicaţii. Funcţia $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ este strict monotonă şi surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcţia $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ este continuă.
Funcţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este strict monotonă şi surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcţia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este continuă.
Funcţia $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, este strict monotonă şi surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcţia $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este continuă.
Funcţia $ctg : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, este strict monotonă şi surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcţia $\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ este continuă.
Funcţia $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este strict monotonă şi surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcţia $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este continuă.

Limite fundamentale

Prezentăm acum câteva limite fundamentale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\text{ unde } a\in(0,\infty)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\text{ unde } r\in\mathbb{R}.$$

Exerciţii.

1. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{tg^2x}$$

şi

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)\ln(1+\sin^2 x)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)tg^2 2x}.$$

2. Să se arate că dacă funcţia continuă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ are limite finite în a şi b, atunci ea este mărginită. Este reciproca adevărată?

3. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\infty$.

4. Fie $a>0$ şi $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Să se arate că f este continuă în 0 dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)$.

5. Să se arate că dacă funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este mărginită pe fiecare interval $(0,b)$ şi dacă

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\infty,$$

atunci
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty.$$

6. Să se arate că pentru orice funcţie neconstantă şi periodică $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

7. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

i) există $M\in\mathbb{R}$ astfel încât
$$|f(x)|\leq Mx,$$
pentru orice $x\in[0,\infty)$;

ii)
$$f(x+y)\geq f(x)+f(y),$$
pentru orice $x,y\in[0,\infty)$.

Să se arate că:

a) există şi sunt finite limitele $a=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x}$ şi $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b)
$$ax\leq f(x)\leq bx,$$
pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

REZUMAT

Se consideră o funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, c un punct de acumulare al lui D şi $b\in\mathbb{R}^q$. Vom spune că f tinde către b, atunci când x tinde către c, dacă pentru orice vecinătate V, a lui b, există U, vecinătate a lui c, astfel încât $f(x)\in V$, pentru orice $x\in(U\cap D)-\{c\}$. Vom nota $f(x)\underset{x\to c}{\to} b$. Dacă $b^{'}\in\mathbb{R}^q$, $f(x)\underset{x\to c}{\to} b$ şi $f(x)\underset{x\to c}{\to} b^{'}$, atunci $b=b^{'}$. Valoarea b, unic determinată de proprietatea $f(x)\underset{x\to c}{\to} b$, poartă numele de limita lui f, atunci când x tinde către c. Vom marca această situaţie astfel: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=b$.

În cadrul de mai sus, următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) există $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to c}f(x)=l$; b) pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_{\varepsilon}>0$ astfel încât pentru orice $x\in D$, $x\neq c$ astfel ca $\|x-c\|<\delta_{\varepsilon}$, avem

$\|f(x)-l\|<\varepsilon$; c) pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de puncte din D, astfel ca $x_n \neq c$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

În cadrul de mai sus, facem presupunerea suplimentară că c este punct al lui D. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) f este continuă în c; b) există $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de acumulare (eventual infinit pentru $q=1$) al mulţimii $E \subseteq \mathbb{R}^q$. Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât, pentru orice $x \in (E\cap U) - \{x_0\}$, avem $f(x) \in V$. Această situaţie se marchează prin notaţia: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi c un punct din D, definim limita superioară a lui f, atunci când x tinde către c, prin $\limsup\limits_{x\to c} f(x) = \inf\limits_{V \text{ vecinătate a lui } c} (\sup\limits_{x\in D\cap V} f(x))$. Analog se defineşte noţiunea de limita inferioară a lui f atunci când x tinde către c, care se notează prin $\liminf\limits_{x\to c} f(x)$.

Definim oscilaţia lui f pe o submulţime A a lui D ca fiind $\omega(f,A) = \sup\limits_{x\in A} f(x) - \inf\limits_{x\in A} f(x) = \sup\limits_{x,y\in A}(f(x)-f(y))$, iar oscilaţia lui f în punctul c ca fiind $\omega(f,c) = \inf\limits_{V \text{ vecinătate a lui } c} \omega(f, V\cap D)$.

În cadrul de mai sus, avem $\omega(f,c) = \limsup\limits_{x\to c} f(x) - \liminf\limits_{x\to c} f(x)$.

În cadrul de mai sus, următoarele afirmaţii sunt echivalente: i) f este continuă în c; ii) $\omega(f,c)=0$; iii) $\limsup\limits_{x\to c} f(x) = \liminf\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare al lui $A \cap (-\infty, a)$. Vom spune că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita la stânga a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui a astfel încât pentru orice $x \in U$, cu $x < a$, avem $f(x) \in V$. Această situaţie se marchează prin $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$ sau prin $f(a-) = l$. Analog se defineşte limita la dreapta a funcţiei f în punctul a. Limita la stânga a funcţiei f în punctul a şi limita la dreapta a funcţiei f în punctul a se numesc limitele laterale ale funcţiei f în punctul a.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare al lui A. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul a dacă şi numai dacă existele ambele laterale (care au sens) ale lui f în a şi sunt egale cu l.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a un punct izolat al lui A. Atunci f este continuă în a.

Dacă a este punct de acumulare al lui A, din A, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă existele ambele laterale (care au sens) ale lui f în a şi sunt egale cu $f(a)$.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punct $a \in A$ se numeşte punct de discontinuitate de prima speţă dacă există şi sunt finite limitele laterale (care au sens) ale lui f în a, dar cel puţin una este diferită de $f(a)$. Celelalte puncte de discontinuitate din A se numesc puncte de discontinuitate de speţa a doua.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale, o funcţie monotonă. Atunci discontinuităţile lui f sunt numai de prima speţă şi mulţimea acestora este cel mult numărabilă.

Mulţimea punctelor de discontinuitate de prima speţă ale oricărei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este cel mult numărabilă.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale, o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Atunci f nu are discontinuităţi de prima speţă.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale, o funcţie monotonă. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f este continuă.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Următoarele afirmaţii sunt echivalente: i) $f : I \to f(I)$ este homeomorfism i.e. f este bijectivă, iar f şi f^{-1} sunt continue; ii) f este strict monotonă şi $f(I)$ este interval; iii) f este continuă şi injectivă.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$**;** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r$**, unde** $r \in \mathbb{R}$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II39801

5. *Gheorghe Sireţchi*, **Calcul Diferenţial şi Integral, vol. 1, Noţiuni fundamentale,** Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32924

DIFERENŢIABILITATE

DERIVATA PE $\mathbb{R}$

Introdusă încă în secolul al XVII-lea, concomitent de către Isaac Newton şi G.W. Leibniz, noţiunea de derivată este una dintre cele mai importante din Analiza matematică. Derivata este o descriere matematică a vitezei de variaţie a unei funcţii. ... trebuie să deosebim între noţiunea de derivată şi aceea de derivabilitate. Derivata este fie un număr real, fie unul dintre simbolurile minus sau plus infinit, în timp ce derivabilitatea nu este un număr, ci o proprietate.

Solomon Marcus, Şocul matematicii, Editura Albatros, Bucureşti, 1987, paginile 252-253

În timp ce noţiunea de integrală îşi are rădăcinile în antichitate, cealaltă noţiune fundamentală a analizei, derivata, a apărut abia în secolul al XVII-lea, datorită lui Fermat şi altor matematicieni. Legătura organică dintre aceste două noţiuni, aparent cu totul diferite, descoperită de Newton şi Leibniz, a inaugurat o dezvoltare fără precedent a ştiinţei matematice. Fermat era interesat în determinarea maximelor şi minimelor unei funcţii. În graficul unei funcţii, un maxim corespunde unui vârf mai înalt decât toate celelalte puncte învecinate, în timp ce un minim corespunde unui punct mai coborât decât toate punctele învecinate. ... Pentru a caracteriza punctele de maxim şi minim, este naturală folosirea noţiunii de tangentă a unei curbe. Presupunem că graficul nu are colţuri ascuţite sau alte singularităţi şi că, în fiecare punct, el are o direcţie determinată, dată de dreapta tangentă în acel punct. În punctele de maxim sau de minim, tangenta la graficul funcţiei trebuie să fie paralelă cu axa Ox, deoarece, în caz contrar, curba ar urca sau ar coborâ în aceste puncte. Această observaţie sugerează ideea considerării tangentei la curbă în fiecare punct al graficului funcţiei.

Ce este matematica?, de R. Courant şi H. Robbins, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pagina 432

The standard definition of the derivative given in first-year calculus is $f^{'}(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ where this is understood to mean that $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ is a pretty good approximation to $f^{'}(a)$ that gets better as x gets closer to a. As we have seen, we can be much more precise. It is more accurate and useful to introduce the actual difference between the derivative and the average rate of change $f^{'}(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + E(x,a)$, where $E(x,a)$ is the discrepancy or error introduced when we use the average rate of change in place of the derivative, or vice-versa. Relying on

an intuitive notion of limits, we would like to say that $f^{'}(a)$ is the value of the derivative provied this error, $E(x,a)$, gets closer to 0 as x gets closer to a. The meaning is clear in most cases, but the phrase "gets closer" is still to ambiguous. What is important is that we can make the absolute value of our error as small as it needs to be by controlling the distance of x from a. We now present notation that was introduced by Cauchy in 1823: $\varepsilon > 0$ to represent the size of the allowable error and $\delta > 0$ to represent the distance between x and a. We fix a real number a and say that f is differenatiable at $x = a$ if and only if there is a number, denoted by $f^{'}(a)$, such that the error $E(x,a) = f^{'}(a) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ satisfies the following condition: for any specified bound on this error, $\varepsilon > 0$, we can find a distance, δ, such that if x is within δ of a ($0 < |x-a| < \delta$), then the error sits within the allowed bound ($|E(x,a)| < \varepsilon$). We call $f^{'}(a)$ the derivative of f at a. ... The definition just given is neither obvious nor easy to absorb. The reader encountering it for the first time should keep in mind that it is the fruit of two centuries of searching. It looks deceptively like the casual definition for it compares $f^{'}(a)$ to the average rate of change $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. There may be a tendency to ignore the ε and δ and hope they are not important. They are. This has proven to be the definition of the derivative that explains those grey areas where differentiation does seem to be working the way we expect it to.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 13-15.

Definiţia derivatei pe $\mathbb{R}$. Legătura dintre derivabilitate şi continuitate
Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat
Teorema lui Rolle, Teorema lui Lagrange, Teorema lui Cauchy şi Teorema lui Darboux
Derivate de ordin superior. Teorema lui Taylor
Metoda lui Newton
Permutarea limitei cu derivata

Definiţia derivatei pe $\mathbb{R}$. Legătura dintre derivabilitate şi continuitate

Aşa cum se întâmplă cu orice concept fundamental, noţiunea de derivată sintetizează modelarea unor fenomene care provin din domenii diferite, ca de exemplu problema tangentei, problema vitezei sau problema densităţii liniare

a unei bare materiale (a se vedea, în acest sens, **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti, paginile 240-241).

Definiţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi c un punct de acumulare al lui D, care aparţine lui D. Dacă există, limita*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se numeşte derivata lui f în c şi se notează $f^{'}(c)$.

Dacă $f^{'}(c)$ *este finită, spunem că f este derivabilă în c.*

Lemă. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi c un punct de acumulare al lui D, care aparţine lui D. Dacă f este derivabilă în c, atunci f este continuă în c.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de puncte din D, care converge către c, cu $x_n \neq c$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci avem

$$f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}(x_n - c) + f(c).$$

Cum

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f^{'}(c)$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - c) = 0,$$

deducem că

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c),$$

deci f este continuă în c. $\square$

Observaţie. *Aşadar continuitatea este o condiţie necesară pentru derivabilitate. Se constată cu uşurinţă că ea nu este si suficientă: de exemplu se poate considera funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Considerând combinaţii algebrice simple, se poate construi cu uşurinţă o funcţie care nu este derivabilă într-un număr finit de puncte sau chiar într-o mulţime numărabilă de puncte. În 1872, Weierstrass a şocat lumea*

matematică, construind o funcţie continuă în orice punct care nu este derivabilă în nici un punct (vezi în acest sens exerciţiul 7, de la pagina ..., precum şi John C. Oxtoby, ***Measure and Category,*** *Springer-Verlag, 1971, capitolul 11).*

Pentru observaţiile de mai jos se paote consulta **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti, paginile 250-271. Regulile de calcul privind derivata sumei, produsului şi câtului a două funcţii, precum şi cea privind calculul derivatei unei funcţii vor fi prezentate într-o formă mai generală în secţiunea următoare.

Observaţie. *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci:*

i) funcţia $f + g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0);$$

ii) funcţia fg este derivabilă în x_0 şi

$$(fg)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0);$$

iii) dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi

$$(\frac{f}{g})^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)g(x_0) - f(x_0)g^{'}(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Observaţie. *Dacă $f : I \to J$ şi $g : J \to \mathbb{R}$, unde I şi J sunt intervale, sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, respectiv $f(x_0) \in J$, atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi*

$$(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0).$$

Observaţie. *Dacă $f : I \to J = f(I)$, unde I şi J sunt intervale, este o funcţie strict monotonă derivabilă în $x_0 \in I$, cu proprietatea că $f^{'}(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $f(x_0)$ şi*

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}.$$

Observaţie. *Iată derivatele câtorva funcţii uzuale*:

$$(x^n)^{'} = nx^{n-1}, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \textit{ şi pentru orice } n \in \mathbb{N};$$

$$(x^\alpha)^{'} = \alpha x^{\alpha-1}, \textit{ pentru orice } x \in (0,\infty) \textit{ şi pentru orice } \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(\sin x)^{'} = \cos x \text{ şi } (\cos x)^{'} = -\sin x, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R};$$

$$(a^x)^{'} = a^x \ln a, \textit{ pentru orice} x \in \mathbb{R} \textit{ şi pentru orice } a \in (0,\infty);$$

$$(\ln x)^{'} = \frac{1}{x}, \textit{ pentru orice } x \in (0,\infty);$$

$$(tgx)^{'} = \frac{1}{\cos^2 x}, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$(ctgx)^{'} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \textit{ pentru orice } x \in (-1,1);$$

$$(ar\cos x)^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \textit{ pentru orice } x \in (-1,1);$$

$$(arctgx)^{'} = \frac{1}{1+x^2}, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R};$$

$$(arcctgx)^{'} = -\frac{1}{1+x^2}, \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat

Noţiunea de derivată este instrumentul principal care se foloseşte într-o problemă practică de o importanţă crucială, anume stabilirea punctelor de extrem ale funcţiilor reale de o variabilă reală.

Prezentăm în continuare primul pas care contribuie la soluţionarea acestei probleme, anume teorema lui Fermat.

Lemă. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, şi c un punct de acumulare al lui D, care aparţine lui D.*

a) Dacă

$$f^{'}(c) > 0,$$

atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c, c+\delta)$, avem

$$f(c) < f(x).$$

b) Dacă

$$f^{'}(c) < 0,$$

atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c-\delta, c)$, avem

$$f(c) < f(x).$$

Demonstraţie.

a) Fie $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât

$$0 < \varepsilon_0 < f^{'}(c).$$

Atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D$, astfel ca $0 < |x - c| < \delta$, avem

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f^{'}(c) \right| < \varepsilon_0,$$

de unde pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem

$$-\varepsilon_0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f^{'}(c).$$

Cum pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem $x - c > 0$, rezultă

$$(f^{'}(c) - \varepsilon_0)(x - c) < f(x) - f(c),$$

de unde concluzia.

Demonstraţia pentru b) este analoagă. $\square$

Definiţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $c \in D$.*

Punctul c se numeşte punct de maxim local (relativ) al funcţiei f, dacă există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem

$$f(c) \geq f(x).$$

Punctul c se numeşte punct de minim local (relativ) al funcţiei f, dacă există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem

$$f(c) \leq f(x).$$

Punctele de maxim local şi cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema lui Fermat. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$ este un punct de maxim (sau minim) local al funcţiei f.*

Dacă f este derivabilă în c, atunci

$$f^{'}(c) = 0.$$

Notă istorică. *Pierre Fermat* (1601-1665) a urmat cursurile Universităţii din Toulouse, după care, în 1620, pleacă la Bordeaux unde începe primele cercetări matematice. Studiază şi la Universitatea din Orléans, de unde primeşte o diplomă în Drept. A fost unul dintre matematicienii de frunte ai vremilor sale (a avut chiar unele controverse cu Descartes). Rezultatul care l-a facut faimos este celebra teoremă care afirmă că ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ (cu necunoscutele x, y, z), nu are soluţii întregi nenule, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Acest rezultat a fost demonstrat în 1993-1994 de către Andrew Wiles. Încercările de a demonstra acest rezultat, care s-au întins pe aproape 300 de ani, au stat la originea algebrei moderne.

Observaţie. *Condiţia $c \in \overset{\circ}{D}$ este esenţială, aşa cum arată următorul exemplu: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$.*

Observaţie. *Funcţia f poate avea puncte de extrem în care să nu fie derivabilă, aşa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Dacă

$$f^{'}(c) > 0,$$

atunci, conform lemei de mai sus, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem

$$f(c) < f(x),$$

ceea ce contrazice faptul că $c \in \overset{\circ}{D}$ un punct de maxim local al funcţiei f.

Dacă

$$f^{'}(c) < 0,$$

atunci, conform lemei de mai sus, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c)$, avem

$$f(c) < f(x),$$

ceea ce contrazice faptul că $c \in \overset{\circ}{D}$ un punct de maxim local al funcţiei f. $\square$

Teorema lui Rolle, Teorema lui Lagrange, Teorema lui Cauchy şi Teorema lui Darboux

Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale teoremei lui Fermat.

Teorema lui Rolle. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel ca $f(a) = f(b)$. Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$f^{'}(c) = 0.$$

Notă istorică. *Michel Rolle* (1652-1719), membru al Academiei Franceze, a contribuit la dezvoltarea Geometriei Analitice şi a Analizei Matematice.

Demonstraţie. Putem presupune că

$$f(a) = f(b) = 0.$$

De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă şi că ia şi valori pozitive.

Există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(c) = \sup_{c \in [a,b]} f(x).$$

Conform teoremei anterioare

$$f^{'}(c) = 0. \ \square$$

Observaţie. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, o funcţie derivabilă. Atunci:*

a) între două soluţii consecutive ale ecuaţiei $f(x) = 0$, se află cel puţin o soluţie a ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$.

b) între două soluţii consecutive, x_1, x_2, ale ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$, se află cel mult o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Teorema următoare, cunoscută şi sub numele de teorema creşterilor finite, este un instrument extrem de utilizat, care intervine în demonstraţia multor rezultate centrale din cadrul Analizei Matematice (vezi, spre exemplu, Teorema de permutare a derivatei cu limita (vezi pagina), Criteriul de Diferenţiabilitate (vezi pagina), Teorema lui Schwarz (vezi pagina), Formula Leibniz-Newton (vezi pagina), Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina), Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina), Teorema privind calculul variaţiei totale a unei funcţii derivabile cu derivata continuă (vezi pagina)).

Teorema lui Lagrange. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c).$$

Demonstraţie. Să considerăm funcţia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Se constată cu uşurinţă că φ este diferenţa dintre f şi funcţia care are ca grafic segmentul de capete $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

Prin aplicarea teoremei anterioare funcţiei φ se obţine concluzia. $\square$

Notă istorică. *Joseph-Louis Lagrange* s-a născut la data de 25 ianuarie 1736 în Torino. El este considerat a fi un matematician francez, deşi a fost botezat cu numele de Giuseppe Lodovico Langragia, părinţii săi fiind originari din regiunea Torino. Bunicul său a fost căpitan de cavalerie în armata franceză, dar a părăsit Franţa pentru a-l sluji pe Ducele de Savoia. Lagrange a studiat la Colegiul din Torino, obiectul său preferat fiind latina. A fost atras de matematică atunci când a citit un articol al lui Halley, privitor la modul în care este folosită algebra în optică. La finele anului 1754, Lagrange deja obţinuse rezultate semnificative în teoria calculului variaţional (adică studiul problemelor de tipul următor: date fiind două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi

$M_2(x_2, y_2)$, să se determine o curbă $y = f(x)$, care uneşte cele două puncte, pentru care valoarea integralei $\int_{x_1}^{x_2} g(x, y)dx$ este minimă; de exemplu, să se determine o curbă care uneşte cele două puncte, pentru care un obiect supus numai forţei de gravitaţie, se deplasează pe acestă curbă, între cele două puncte, în cel mai scurt timp). În 1755 a fost numit profesor de matematică la Şcoala Regală de Artilerie din Torino. A trimis rezultatele sale lui Euler, care a fost impresionat de noile metode elaborate de Lagrange. La propunerea lui Euler, Lagrange a fost ales, în 1756, membru al Academiei din Berlin. Este, de asemenea, membru fondator al Academiei Regale de Ştiinţe din Torino. În 1766 îi succede lui Euler ca director al secţiei de matematică din cadrul Academiei din Berlin. A câştigat în cîteva rânduri premiul Academiei de Ştiinţe din Paris (în anii 1772, împreună cu Euler, pentru studiul problemei celor trei corpuri, în 1774, pentru studiul mişcării lunii şi în 1780 pentru studiul perturbaţiilor orbitelor cometelor, provocate de către planete). În perioada petrecută la Berlin a abordat teme diverse din astronomie, precum stabilitatea sistemului solar, mecanică, dinamică, mecanica fluidelor, probabilităţi, teoria numerelor (a demonstrat că orice număr natural se prezintă ca suma a patru pătrate perfecte). În 1787 părăseşte Berlinul pentru a deveni membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. În 1788 apare o carte esenţială, care-l are drept autor pe Lagrange, anume "Mécanique analytique", carte în care se priveşte mecanica ca un subdomeniu al analizei matematice. A fost primul profesor de analiză matematică de la École Polytechique (fondată în 1794). A predat, de asemenea, la École Normale (fondată în 1795). A publicat două volume cu lecţiile de Analiză Matematică susţinute în decursul carierei sale didactice. A murit la 3 aprilie 1813.

Consecinţe. **1**. *În cadrul teoremei de mai sus, avem:*
a) dacă $f^{'}(x) = 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este constantă.
b) dacă $f^{'}(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este crescătoare.
c) dacă $f^{'}(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare.

2. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obţine diverse aproximări.*

De exemplu, pentru a aproxima pe $\sqrt{105}$, conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (100, 105)$ astfel ca $\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$, de unde $\frac{5}{2.11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2.10}$, adică $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.

3. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obţine diverse inegalităţi.*

De exemplu, este cunoscută inegalitatea lui Bernoulli, anume că pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $1 + x > 0$, avem $(1 + x)^n > 1 + nx$. Vom arăta că această inegalitate este valabilă pentru orice exponent real $r \geq 1$. În acest scop putem considera funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = (1 + x)^r$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$. Aplicînd teorema lui Lagrange pe intervalul de capete x şi 0, se obţine inegalitatea de mai sus.

4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, o funcţie continuă, derivabilă pe $I - \{x_0\}$, unde $x_0 \in I$, pentru care există $\lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$. Atunci $f^{'}(x_0)$ există şi $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$.*

O generalizare a teoremei lui Lagrange este dată de următorul rezultat.

Teorema lui Cauchy. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b). Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$(f(b) - f(a))g^{'}(c) = (g(b) - g(a))f^{'}(c).$$

Demonstraţie. Pentru $g(a) = g(b)$ concluzia este imediată.

În caz contrar, să considerăm funcţia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(g(x) - g(a)),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Teorema lui Rolle aplicată acestei funcţii încheie demonstraţia. □

De o mare utilitate pentru calculul limitelor de funcţii sunt următoarele două rezultate care au la baza demonstraţiei teorema lui Cauchy (vezi **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti, paginile 303-317).

Regula lui l'Hospital. *Fie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$, I un interval din $\mathbb{R}$, astfel ca $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$ şi $x_0 \in [a, b]$. Se consideră două funcţii $f, g : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăţi:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$).

b) f şi g sunt derivabile şi $g^{'}(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$.

c) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$.

Atunci:

i) $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$ (respectiv există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \cap V - \{x_0\}$.

ii) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}.$$

Notă istorică. *Guillaume François l'Hospital* (1661-1704) a fost studentul lui Johann Bernoulli (1667-1748). A fost cel care a tiparit, în 1696, primul curs de Analiză Matematică (care cuprindea lecţiile primite de la Bernoulli).

Complementar regulii lui l'Hospital este următorul rezultat (vezi exerciţiul 10).

Teoremă. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel ca:*

a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

b) f şi g sunt derivabile în x_0 şi $g^{'}(x_0) \neq 0$.

Atunci există V, o vecinătate a lui x_0, astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \cap V - \{x_0\}$, şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(x_0)}{g^{'}(x_0)}.$$

Teorema lui Darboux

Deşi derivata unei funcţii nu este în mod necesar continuă, este valabil următorul rezultat (ce se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei referitoare la metoda lui Newton).

Teorema lui Darboux. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, o funcţie derivabilă. Atunci pentru orice J, interval inclus în I, $f^{'}(J)$ este interval.*

Notă istorică. *Jean Gaston Darboux* (1842-1917) a urmat liceele din Nimes şi Montpellier, precum şi École Polytechnique şi École Normale Supérieure.

În 1866 obţine titlul de doctor în matematici cu o teză intitulată *Sur les surfaces orthogonales*. În anul academic 1866-1867 predă la Collège de France, iar între 1867 şi 1872 la Liceul Louis le Grand. Între 1873 şi 1881 predă la École Normale Supérieure. A fost decanul Facultăţii de Ştiinţe de la Sorbona, între 1889 şi 1903. Darboux a adus contribuţii importante în Geometria Diferenţială şi Analiza Matematică. A fost membru al Royal Society of London şi al Académie des Sciences.

Demonstraţie. Pentru $a, b \in J$, $a < b$, să presupunem că $f^{'}(a) < f^{'}(b)$.

Pentru $\lambda \in (f^{'}(a), f^{'}(b))$, arbitrar, considerăm funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x,$$

pentru orice $x \in I$.

Avem

$$\varphi^{'}(a) < 0$$

şi

$$\varphi^{'}(b) > 0.$$

Cum

$$\lim_{x \searrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi^{'}(a) < 0$$

şi

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi^{'}(b) > 0,$$

există $c, d \in (a, b)$, $c < d$ astfel ca

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,$$

pentru orice $x \in (a, c)$, şi

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0,$$

pentru orice $x \in (d, b)$.

Ca atare,

$$\varphi(x) - \varphi(a) < 0,$$

pentru orice $x \in (a, c)$ şi

$$\varphi(x) - \varphi(b) < 0,$$

pentru orice $x \in (d, b)$.

Există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\varphi(c) = \inf_{c \in [a,b]} \varphi(x).$$

Prin urmare, din teorema lui Fermat, găsim că

$$\varphi^{'}(c) = 0,$$

adică

$$f^{'}(c) = \lambda,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Derivate de ordin superior. Teorema lui Taylor

O generalizare a teoremei lui Lagrange, extrem de utilă din punct de vedere practic, atât pentru calculul limitelor (vezi spre exemplu exerciţiul 11), cât şi pentru determinarea punctelor de extrem, este dată de Teorema lui Taylor. Acest rezultat se va folosi de asemenea în cadrul demonstraţiei teoremei referitoare la metoda lui Newton (vezi pagina), precum şi în cadrul considerentelor premergătoare Teoremei lui Bernstein (vezi pagina).

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe D. Dacă $f^{'}$ este derivabilă în $c \in D$, vom nota $(f^{'})(c) = f^{''}(c)$ şi vom numi această valoare a doua derivată a lui f în c.*

Similar se definesc a treia,..., a n-a derivată a lui f în c, notate $f^{'''}(c)$,..., $f^{(n)}(c)$.

Teorema lui Taylor. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi: există $f^{'}$, $f^{''}$, ..., $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi sunt continue şi există $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, există γ între α şi β astfel ca*

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

Notă istorică. *Brook Taylor* (1685-1731) a urmat cursurile St John' College Cambridge. În 1712 devine membru al Royal Society. Taylor este cel

care a descoperit metoda integrării prin părţi precum şi teorema de mai sus (rezultate care sunt conţinute in cartea *Methodus incrementorum directa et inversa*, apărută în 1715).

Demonstraţie. Fie P numărul real definit de relaţia

$$\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}P = f(\beta)-\{f(\alpha)+\frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)+\frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+....+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}\}.$$

Considerăm funcţia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(\beta)-\{f(x)+\frac{f^{'}(x)}{1!}(\beta-x)+\frac{f^{''}(x)}{2!}(\beta-x)^2+....+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}+\frac{P}{n!}(\beta-x)^n\},$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

Avem, pentru orice $x \in [a,b]$,

$$\varphi^{'}(x) = \frac{P-f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1},$$

de unde, conform teoremei lui Rolle, se deduce concluzia.

Observaţie. *Cantitatea* $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n$ *se notează cu* R_n *şi se numeşte restul sub forma lui Lagrange. Acest rest se poate prezenta şi în alte forme. Menţionăm aici doar forma lui Cauchy, anume, există* $\theta \in (0,1)$ *astfel ca*

$$R_n = (1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n.$$

Metoda lui Newton

Pe lângă problema determinării punctelor de extrem, o altă problemă practică în care noţiunea de derivată îşi dovedeşte eficienţa este aceea a "rezolvării aproximative" a ecuaţiilor.

Atunci cînd ecuaţia $f(x) = 0$ nu se poate rezolva "exact" se apelează la tehnici de aproximare a soluţiilor. Una dintre aceste tehnici este metoda lui Newton (sau mai exact metoda lui Newton-Raphson). Metoda are la

bază ideea aproximării graficului lui f cu tangenta lui f în apropierea unei soluţii a ecuaţiei $f(x) = 0$. Mai precis se procedează astfel: se foloseşte tangenta pentru a se aproxima graficul lui f în jurul punctului $(x_n, f(x_n))$ de pe graficul lui f, unde $f(x_n)$ este "mic" şi $f^{'}(x_n) \neq 0$; se determină punctul x_{n+1} în care tangenta la graficul lui f în $(x_n, f(x_n))$ intersectează axa Ox, i.e. se rezolvă sistemul dat de ecuaţiile $y = 0$ şi $y = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n)$ şi se obţine

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)};$$

se continuă procedeul înlocuind punctul $(x_n, f(x_n))$ cu punctul $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$.

Exemple.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x^3 - x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum f este continuă şi $f(1)f(2) < 0$, deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie între 1 şi 2. Se porneşte cu punctul $(x_0 \, , f(x_0))$, unde $x_0 = 1$. Iată calculele:

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$
0	1	-1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,347826087
2	1,347826087	0,100682174	4,449905482	1,325200399
3	1,325200399	0,002058363	4,268468293	1,324718174
4	1,324718174	0,000000925	4,264634722	1,324717957
5	1,324717957	-5×10^{-10}	4,264632997	1,324717957

Un alt exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x^2 - 2,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum f este continuă şi $f(1)f(2) < 0$, deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie între 1 şi 2. Se porneşte cu punctul $(x_0 \, , f(x_0))$, unde $x_0 = 1$. Se obţine

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n},$$

de unde

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Iată calculele:

	Eroarea	Numărul de cifre corecte
$x_0 = 1$	$-0,41421$	1
$x_1 = 1,5$	$0,08579$	1
$x_2 = 1,41667$	$0,00245$	3
$x_3 = 1,41422$	$0,00001$	5

Metoda lui Newton este folosită de cele mai multe dintre calculatoare pentru a calcula soluţiile unor ecuaţii, deoarece convergenţa ei este rapidă.

Observaţie. *Metoda lui Newton nu converge întotdeauna. Spre exemplu, pentru* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dată de*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r}, & \text{pentru } x \geq r \\ -\sqrt{r-x}, & \text{pentru } x \leq r \end{cases}$$

dacă alegem $x_0 = r-h$*, obţinem* $x_1 = r+h$*, iar apoi termenii şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oscilează între aceste două valori.*

Observaţie. *Dacă metoda lui Newton converge, atunci ea converge către o soluţie a ecuaţiei* $f(x) = 0$*. Dacă* x_0 *nu este însă suficient de aproape de soluţia care se urmăreşte a fi aproximată, este posibil ca metoda lui Newton să conveargă către o altă soluţie a ecuaţiei* $f(x) = 0$*.*

Observaţie. *Se poate arăta că dacă inegalitatea*

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

este validă pe un interval care are drept punct interior o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$*, atunci metoda lui Newton converge către aceea soluţie. Această condiţie este suficientă dar nu şi necesară.*

Iată un alt rezultat pozitiv privind metoda lui Newton. El este, în esenţă, datorat lui Joseph Fourier şi lui J. Raymond Mouraille.

Notă istorică. *Isaac Newton*, fiul unui fermier bogat dar complet needucat, s-a născut în 1643, la Lincolnshire, Anglia. Frecventează Free Grammar School din Gratham. Din 1661 frecventează cursurile de la Trinity College, Cambridge. Interesul lui Newton pentru matematică este stârnit în 1663, an în care, cumpărând o carte de astronomie, nu o poate înţelege datorită slabei pregătiri matematice. Datorită unei epidemii, în 1665, se întoarce la Lincolnshire, unde, într-o perioadă de doi ani pune bazele noilor sale idei din matematică, fizică, optică şi astronomie. În 1669 i se oferă postul de Lucasian Profesor, lăsat liber de către Barrow. A stabilit că, în contradicţie cu ceea ce se credea pînă atunci, lumina nu este formată dintr-o singură entitate de bază, ci este un mixaj de diverse tipuri de raze. Publică aceste concluzii, în 1672, în "Philosophical Transactions of the Royal Society". În 1687 scrie "Philosophiae naturalis principia mathematica", recunoscută ca fiind cea mai importantă carte ştiinţifică scrisă vreodată şi care-l propulsează în postura de lider internaţional în cercetarea ştiinţifică. În 1701 preia o funcţie guvernamentală la Londra. Regina Anne îi acordă în 1705 titlul de Sir. A murit în 1727.

Propoziţie. *Fie I un interval al dreptei reale, $a,b \in I$, $a < b$, şi $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

i)

$$f(a)f(b) < 0$$

ii)

$$f^{'}(x) \neq 0 \text{ şi } f^{''}(x) \neq 0,$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

iii) există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci există $l \in (a,b)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

şi

$$f(l)=0.$$

Demonstraţie. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $l\in(a,b)$ astfel încât $f(l)=0$.

Deoarece $f^{'}$ şi $f^{''}$ au proprietatea lui Darboux ele păstrează semn constant pe $[a,b]$.

Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că

$$f^{'}(x)>0$$

şi

$$f^{''}(x)>0,$$

pentru orice $x\in[a,b]$.

Aşadar f este strict crescătoare.

Fie $x_1\in(l,b]$.

Atunci

$$x_n>l,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Într-adevăr, pentru $n\in\mathbb{N}$, fie

$$P(n)\colon\ x_n>l.$$

Evident, $P(1)$ este adevărată.

Presupunând că $P(n)$ este adevărată, vom arăta că $P(n+1)$ este adevărată.

Într-adevăr, conform teoremei lui Taylor, există $\zeta\in(l,x_n)$ astfel încât

$$f(l)=f(x_n)+f^{'}(x_n)(l-x_n)+\frac{f^{''}(\zeta)}{2}(l-x_n)^2,$$

de unde

$$f(x_n)+f^{'}(x_n)(l-x_n)<0,$$

i.e.

$$l-x_n<-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)},$$

adică

$$l<x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}=x_{n+1},$$

deci $P(n+1)$ este adevărată.

Prin urmare, conform metodei inducţiei matematice,

$$x_n > l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

Deoarece f este strict crescătoare, avem

$$f(x_n) > f(l) = 0,$$

deci

$$\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} > 0,$$

de unde

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = x_{n+1} < x_n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind descrescător şi mărginit (avem $x_n \in [a, b]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$), este convergent.

Fie $\alpha \in [a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Prin trecere la limită în relaţia de definire a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)},$$

i.e., având în vedere continuitatea lui f şi $f^{'}$,

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f^{'}(\alpha)},$$

de unde

$$f(\alpha) = 0.$$

Cum $f(l) = 0$ şi f este injectivă (fiind strict crescătoare), deducem că $l = \alpha$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

şi

$$f(l) = 0.$$

Permutarea limitei cu derivata

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, I fiind un interval din $\mathbb{R}$. Este uşor de găsit un şir de funcţii care sunt derivabile în orice punct şi astfel ca limita şirului să nu fie derivabilă într-un punct. Mai mult, există un şir de funcţii, care sunt derivabile în orice punct, şi care converge uniform către o funcţie continuă, ce nu este derivabilă în nici un punct. Prin urmare, în general, nu este posibil să considerăm derivata limitei unui şir convergent de funcţii derivabile, chiar dacă avem convergenţă uniformă. Vom arăta, în cele ce urmează, că, dacă şirul derivatelor este uniform convergent, atunci situaţia este favorabilă relativ la problema de mai sus. Mai precis avem următoarea:

Teoremă. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, I fiind un interval mărginit din $\mathbb{R}$. Să presupunem că există $x_0 \in I$ astfel încât şirul $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, f_n este derivabilă şi că şirul $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe I, către o funcţie $g : I \to \mathbb{R}$.*

Atunci şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe I, către o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ şi, mai mult,

$$f^{'} = g,$$

adică

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))^{'} = \lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x).$$

Demonstraţie. Să presupunem că extremităţile lui I sunt a şi b, cu $a < b$.

Să considerăm un element arbitrar $x \in I$.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}$, conform teoremei lui Lagrange, există y (depinzând de m şi n) între x şi x_0, astfel ca

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(f_m^{'}(y) - f_n^{'}(y)).$$

Ca atare

$$\|f_m - f_n\| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\left\|f_m^{'} - f_n^{'}\right\|,$$

deci şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe I, către o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$.

Fie $c \in I$.

Conform teoremei lui Lagrange, există z (depinzând de m şi n) între x şi c, astfel ca

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x-c)(f_m^{'}(z) - f_n^{'}(z)).$$

În consecinţă, pentru $x \in I$, $x \neq c$, avem

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \left\|f_m^{'} - f_n^{'}\right\|. \qquad (*)$$

Deoarece şirul $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform, pe I, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\left\|f_m^{'} - f_n^{'}\right\| < \varepsilon,$$

deci, trecând la limită, în $(*)$, după m, obţinem

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{'}(c) = g(c)$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_\varepsilon$ să avem

$$\left|f_n^{'}(c) - g(c)\right| < \varepsilon.$$

Fie

$$k_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}.$$

Deoarece f_{k_ε} este derivabilă în c, există δ (depinzând de k_ε, deci de ε), astfel ca

$$\left|\frac{f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(c)}{x-c} - f_{k_\varepsilon}^{'}(c)\right| < \varepsilon,$$

pentru orice x astfel ca $0 < |x-c| < \delta$.

Prin urmare

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - g(c)\right| < 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că f este derivabilă în c şi că

$$f^{'}(c) = g(c). \ \square$$

Exerciţii

1. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, are proprietatea că pentru orice $a<x_1<x_2<x_3<b$, avem $0\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)^2}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{(x_3-x_2)^2}$, atunci f este constantă.

2. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în c, unde $c\in(a,b)$. Să se arate că dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri de elemente din (a,b), primul crescător, iar cel de al doilea descrescător, ambele tinzînd către c, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f^{'}(c)$.

3. Să se construiască o funcţie derivabilă, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a cărei derivată nu este continuă.

4. Fie funcţia, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată de $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+...+a_n\sin nx$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde a_1, a_2, ..., $a_n\in\mathbb{R}$, iar $n\in\mathbb{N}$. Dacă $|f(x)|\leq|\sin x|$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $|a_1+2a_2+...+na_n|\leq 1$.

5. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată de $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}-x, & x\leq 0\\ x^2e^{-x}, & x>0\end{array}\right.$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă (i.e. există, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}$). Să se arate că, dacă, pentru un $n_0\in\mathbb{N}$, avem $f(1)=f(0)=f^{'}(0)=f^{''}(0)=...=f^{(n)}(0)=0$, atunci există $x\in(0,1)$, astfel încât $f^{(n+1)}(x)=0$.

7. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$, unde I este un interval mărginit din $\mathbb{R}$, este derivabilă şi nemărginită, atunci $f^{'}$ este nemărginită.

8. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, pentru care există $M>0$ astfel încât $\left|f^{'}(x)-f^{'}(y)\right|\leq M|x-y|$, pentru orice $x,y\in[0,\infty)$. Să se arate că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+\frac{1}{n})-f(x))=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci există $\mu>0$ astfel încât$|f(x)-f(y)|\leq\mu|x-y|$, pentru orice $x,y\in[0,\infty)$.

9. Să se studieze posibilitatea aplicării regulii lui l'Hospital fracţiei $\frac{f(x)}{g(x)}$ pentru x tinzînd la 0, unde $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ este dată de $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este dată de $g(x)=\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

10. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x)}$ dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.$ şi $g(x)=\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-arctx}{x^2\ln(1+x)}$, folosind formula lui Taylor.

12. Există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabilă de două ori astfel ca $f\geq 0$ şi $f^{''}<0$?

13. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi

$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, este dată, pentru orice $x \in [0, \pi]$, de $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$.

14. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este dată, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de $f_n(x) = \frac{arctg\ nx}{n}$.

REZUMAT

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi c un punct de acumulare al lui D, care aparţine lui D. Dacă există, limita $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ se numeşte derivata lui f în c şi se notează $f'(c)$. Spunem în acest caz că f este derivabilă în c.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $c \in D$. Punctul c se numeşte punct de maxim local (relativ) al funcţiei f, dacă există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem $f(c) \geq f(x)$. Punctul c se numeşte punct de minim local (relativ) al funcţiei f, dacă există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem $f(c) \leq f(x)$. Punctele de maxim local şi cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$ este un punct de maxim (sau minim) local al funcţiei f. Dacă f este derivabilă în c, atunci $f'(c) = 0$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel ca $f(a) = f(b)$. Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

În cadrul teoremei de mai sus, avem: a) dacă $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este constantă; b) dacă $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este crescătoare; c) dacă $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b). Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, o funcţie derivabilă. Atunci pentru orice J, interval inclus în I, $f^{'}(J)$ este interval.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe D. Dacă $f^{'}$ este derivabilă în $c \in D$, vom nota $(f^{'})(c) = f^{''}(c)$ şi vom numi această valoare a doua derivată a lui f în c. Similar se definesc a treia,..., a n-a derivată a lui f în c, notate $f^{'''}(c)$,..., $f^{(n)}(c)$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi: există $f^{'}$, $f^{''}$, ..., $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi sunt continue şi există $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, există γ între α şi β astfel ca

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

Cantitatea $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n$ se notează cu R_n şi se numeşte restul sub forma lui Lagrange. Acest rest se poate prezenta şi în alte forme, ca de exmplu în forma lui Cauchy, anume, există $\theta \in (0, 1)$ astfel ca $R_n = (1 - \theta)^{n-1} \frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n$.

Fie I un interval al dreptei reale, $a, b \in I$, $a < b$, şi $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât: i) $f(a)f(b) < 0$; ii) $f^{'}(x) \neq 0$ şi $f^{''}(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$; iii) există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $l \in (a, b)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ şi $f(l) = 0$.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, o funcţie derivabilă. Atunci: a) între două soluţii consecutive ale ecuaţiei $f(x) = 0$, se află cel puţin o soluţie a ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$; b) între două soluţii consecutive, x_1, x_2, ale ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$, se află cel mult o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Fie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$, I un interval din $\mathbb{R}$, astfel ca $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$ şi $x_0 \in [a, b]$. Se consideră două funcţii $f, g : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăţi: a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$); b) f şi g sunt derivabile şi $g^{'}(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$; c) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$. Atunci: i) $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$ (respectiv există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \cap V - \{x_0\}$; ii) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$**.**

Fie I **un interval din** $\mathbb{R}$**,** $x_0 \in I$**, şi** $f, g : I \to \mathbb{R}$ **două funcţii astfel ca: a)** $f(x_0) = g(x_0) = 0$**; b)** f **şi** g **sunt derivabile în** x_0 **şi** $g^{'}(x_0) \neq 0$**. Atunci există** V**, o vecinătate a lui** x_0**, astfel încât** $g(x) \neq 0$**, pentru orice** $x \in I \cap V - \{x_0\}$**, şi** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(x_0)}{g^{'}(x_0)}$**.**

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **un şir de funcţii, unde, pentru orice** $n \in \mathbb{N}$**,** $f_n : I \to \mathbb{R}$**,** I **fiind un interval mărginit din** $\mathbb{R}$**. Să presupunem că există** $x_0 \in I$ **astfel încât şirul** $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ **converge, că, pentru orice** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **este derivabilă şi că şirul** $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniform, pe** I**, către o funcţie** $g : I \to \mathbb{R}$**. Atunci şirul** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniform, pe** I**, către o funcţie derivabilă** $f : I \to \mathbb{R}$ **şi, mai mult,** $f^{'} = g$**, adică** $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))^{'} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{'}(x)$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 3901

5. *Gheorghe Sireţchi*, **Calcul Diferenţial şi Integral, vol. 1, Noţiuni fundamentale,** Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II32924

DERIVATA ÎN $\mathbb{R}^n$

Derivata după o direcţie
Diferenţiabilitate. Matricea Jacobi. Jacobianul
Continuitatea derivatelor parţiale asigură diferenţiabilitatea
Operaţii cu funcţii diferenţiabile
Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional
Derivate parţiale de ordin superior. Schimbarea ordinii de derivare
Diferenţiale de ordin superior. Teorema lui Taylor-cazul multidimensional

Derivata după o direcţie

În cursul precedent am considerat derivata unei funcţii care are domeniul şi codomeniul din $\mathbb{R}$ şi am constatat că aceasta constituie instrumentul adecvat pentru a determina punctele de extrem local ale funcţiei. Deoarece determinarea punctelor de extrem constituie o problemă centrală în multe ramuri ale ştiinţei şi pentru că în modelarea fenomenelor naturale apar, de obicei, funcţii de mai multe variabile, vom încerca să construim un instrument asemănător adecvat acestui caz, care să servească aceluiaşi scop.

Definiţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ şi c un punct de acumulare al lui D care aparţine lui D. Dacă există, limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ se numeşte derivata lui f în c şi se notează $f^{'}(c)$. Dacă $f^{'}(c)$ este finită, spunem că f este derivabilă în c.*

Definiţia de mai sus este valabilă şi în cazul în care $f : D \to \mathbb{R}^q$, cu modificarea că, în acest caz, $f^{'}(c) \in \mathbb{R}^q$. Acest fapt este demn de remarcat, căci o funcţie $f : I \to \mathbb{R}^q$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, este o curbă din $\mathbb{R}^q$, iar derivata sa în c, când există, generează un vector tangent la curbă în punctul $f(c)$. Altfel, dacă gândim pe x ca fiind timpul, funcţia f furnizează traiectoria unui punct din $\mathbb{R}^q$, iar derivata sa în c, când există, reprezintă viteza punctului la momentul c.

O privire atentă asupra definiţiei anterioare arată că unicul loc în care se foloseşte faptul că funcţia considerată are domeniul din $\mathbb{R}$, este atunci când

se consideră cîtul $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Această expresie nu mai are semnificaţie pentru o funcţie cu domeniu din $\mathbb{R}^q$.

O cale de a ataca problema ridicată mai sus este de a "tăia" domeniul funcţiei cu drepte ce trec prin c. Mai precis:

Definiţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi c un punct interior al lui D, iar $u \in \mathbb{R}^p$. Un vector $L_u \in \mathbb{R}^q$, se numeşte derivata lui f, în punctul c, după vectorul u (sau după direcţia u, dacă $\|u\| = 1$), dacă există limita $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$ şi*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t} = L_u.$$

Observaţie. *L_u, dacă există, este unic şi se notează $f_u(c)$ sau $\frac{df}{du}(c)$. Notăm cu f_u sau cu $\frac{df}{du}$ funcţia rezultantă, care are valori în $\mathbb{R}^q$ şi domeniul constând din acele puncte din D, în care există limita $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$.*

Observaţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi c un punct interior al lui D. Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, unde 1 este pe poziţia i. Atunci, dacă există, $f_{e_i}(c) \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$, respectiv $f_{e_i} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$, se numesc derivata parţială a lui f în c, în raport cu variabila x_i, respectiv derivata parţială a lui f în raport cu variabila x_i.*

Diferenţiabilitate. Matricea Jacobi. Jacobianul

Este posibil ca o funcţie care are derivată într-un punct după orice direcţie, să nu fie continuă în acel punct. De asemenea, este posibil ca o funcţie să aibă, într-un punct, derivată după o anumită direcţie, dar să nu aibă, în acelaşi punct, derivată după o altă direcţie. Toate aceste lucruri arată că definiţia de mai sus, deşi marchează un progres în căutările noastre, nu este instrumentul dorit.

Pentru a rezolva problema trebuie să privim definiţia funcţiei derivabile din cazul 1-dimensional într-un alt mod.

Mai precis, avem:

Propoziţie. *Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $c \in U$.*
Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f este derivabilă în c.

b) există o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i.e. $L(\alpha x+\beta y) = \alpha L(x)+\beta L(y)$, pentru orice $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$) astfel ca

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{|x - c|} = 0.$$

Această nouă abordare ne conduce la următoarea:

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Spunem că f este diferenţiabilă (sau derivabilă) în c dacă există o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (i.e. $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^p$) astfel ca*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0.$$

Observaţie. *L, dacă există, este unică şi se notează cu $Df(c)$ sau $f^{'}(c)$ şi se numeşte diferenţiala (sau derivata) lui f în punctul c.*

Propoziţia următoare arată că o funcţie diferenţiabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Propoziţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este diferenţiabilă în c, atunci există $\delta, K \in \mathbb{R}$, $\delta, K > 0$, astfel încât avem*

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|,$$

pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$.

În particular, f este continuă în c.

Demonstraţie. Conform ipotezei, există o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0,$$

deci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$, avem

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \|x - c\|,$$

de unde, utilizând inegalitatea triunghiului,

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|.$$

Conform propoziţiei de la pagina 227, există $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, astfel ca

$$\|L(x-c)\| \leq M \|x-c\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Prin urmare

$$\|f(x)-f(c)\| \leq (M+1)\|x-c\|,$$

pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x-c\| < \delta$. $\square$

Exemple

1. Pentru $p = q = 1$, funcţia f este diferenţiabilă în c dacă şi numai dacă f este derivabilă în c şi $Df(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de

$$Df(c)(u) = f^{'}(c)u,$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

2. Pentru $p = 1$, $q > 1$, funcţia f are componentele f_1, f_2, ..., f_q, deci $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. Atunci f este diferenţiabilă în c dacă şi numai dacă $f_1, f_2, ..., f_q$ sunt diferenţiabile în c şi $Df(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ este dată de

$$Df(c)(u) = (f_1^{'}(c)u, f_2^{'}(c)u, ..., f_q^{'}(c)u) = u(f_1^{'}(c), f_2^{'}(c), ..., f_q^{'}(c)),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

3. Pentru $p > 1$, $q = 1$, dacă f este diferenţiabilă în c, atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Existenţa tuturor derivatelor parţiale în c, nu este, în general, o condiţie suficientă pentru diferenţiabilitatea funcţiei f în c.

$Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este dată de

$$Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p,$$

pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$.

Observaţie. *Orice funcţie liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilitatea în orice $c \in \mathbb{R}^p$ şi $Df(c) = f$.*

În particular, aplicaţiile $pr_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, date de $pr_i(u_1, u_2, ..., u_p) = u_i$, pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, sunt liniare, deci, în orice $c \in \mathbb{R}^p$, avem

$$Dpr_i(c) = pr_i,$$

fapt care justifică notaţia

$$pr_i = dx_i.$$

Atunci, cu aceste notaţii, avem

$$Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)pr_1(u_1, u_2, ..., u_p) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)pr_p(u_1, u_2, ..., u_p) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1(u_1, u_2, ..., u_p) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p(u_1, u_2, ..., u_p),$$

pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$ (avem mai sus o egalitate de numere reale), adică

$$Df(c) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i,$$

care este o egalitate de aplicaţii liniare din $\mathbb{R}^p$ în $\mathbb{R}$.

5. Pentru $p, q > 1$ şi $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, dacă f este diferenţiabilă în c, atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$.

Mai mult, $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este dată de

$$Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c)u_p, ..., \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c)u_p)$$

pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$.

Matricea asociată acestei aplicaţii liniare, pentru perechea de baze canonice, este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix}.$$

Această matrice se numeşte matricea Jacobi a lui f în c şi se notează $J_f(c)$.

Când $p = q$, determinantul acestei matrici poartă numele de Jacobianul lui f în c şi se notează

$$det\ J_f(c)$$

sau

$$\frac{\partial((f_1, f_2, ..., f_q))}{\partial((x_1, x_2, ..., x_p))} \Big|_{x=c} .$$

Teoremă. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$. *Dacă* f *este diferenţiabilă în* c, *atunci există* $\frac{df}{du}(c)$ *şi*

$$\frac{df}{du}(c) = Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Continuitatea derivatelor parţiale asigură diferenţiabilitatea

Am văzut că diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct implică existenţa tuturor derivatelor parţiale în acel punct, deci existenţa derivatelor parţiale într-un punct este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitatea în acel punct. Ea nu este şi o condiţie suficientă, aşa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{array} .$$

Deşi existenţa derivatelor parţiale într-un punct nu este o condiţie suficientă pentru diferenţiabilitatea în acel punct, continuitatea acestor derivate parţiale constituie o condiţie suficientă.

Mai precis avem:

Teoremă (Criteriu de diferenţiabilitate). *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$. *Dacă există* V *o vecinătate a lui* c *pe care există toate derivatele parţiale şi acestea sunt continue în* c, *atunci* f *este diferenţiabilă în* c.

Demonstraţie. Este suficient să consideră cazul $q = 1$.

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, fie $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $j \in \{1, 2, ..., p\}$ şi orice $y \in D$, astfel ca $\|y - c\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right\| < \varepsilon.$$

Dacă

$$x = (x_1, ..., x_p)$$

şi

$$c = (c_1, ..., c_p)$$

considerăm vectorii

$$u_0 = x,$$

$$u_1 = (c_1, x_2, ..., x_p),$$
$$u_2 = (c_1, c_2, x_3, ..., x_p),$$
$$...$$
$$u_{p-1} = (c_1, c_2, c_3, ..., c_{p-1}, x_p),$$
$$u_p = c.$$

Atunci
$$f(x) - f(c) = \sum_{j=1}^{p} (f(u_{j-1}) - f(u_j)).$$

Aplicând teorema lui Lagrange celui de al j-lea termen din suma precedentă, există ξ_j, aparţinând segmentului de capete u_{j-1} şi u_j, astfel ca
$$f(u_{j-1}) - f(u_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j)(x_j - c_j).$$

Prin urmare avem
$$f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) = \sum_{j=1}^{p} (x_j - c_j)(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)).$$

Pentru $\|x - c\| < \delta_\varepsilon$, obţinem
$$\left\| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{p} |x_j - c_j| \, \varepsilon \leq \|x - c\| \, \varepsilon \sqrt{p}.$$

Prin urmare, am arătat că f este diferenţiabilă în c şi că $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este dată de
$$Df(c)(z_1, z_2, ..., z_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) z_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) z_p,$$
pentru orice $(z_1, z_2, ..., z_p) \in \mathbb{R}^p$. $\square$

Operaţii cu funcţii diferenţiabile

Rezultatele din această secţiune descriu comportamentul clasei funcţiilor diferenţiabile la operaţii algebrice.

Propoziţie. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $c \in \overset{\circ}{D}$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Dacă f *şi* g *sunt diferenţiabile în* c, *atunci* $h = \alpha f + \beta g$ *este diferenţiabilă în* c *şi*

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c).$$

b) Dacă f *şi* g *sunt diferenţiabile în* c, *atunci* $k = f \cdot g$ *este diferenţiabilă în* c *şi*

$$Dk(c)(u) = Df(c)(u)g(c) + f(c)Dg(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

c) Dacă φ *este diferenţiabilă în* c, *atunci* φf *este diferenţiabilă în* c *şi*

$$D(\varphi f)(c)(u) = D\varphi(c)(u)f(c) + \varphi(c)Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Teoremă (de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse). *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to D^{'} \subseteq \mathbb{R}^q$, $c \in \overset{\circ}{D}$ *şi* $g : D^{'} \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ *astfel ca* $f(c) \in \overset{\circ}{D^{'}}$.

Dacă f *este diferenţiabilă în* c, *iar* g *diferenţiabilă în* $f(c) \overset{not}{=} b$, *atunci* $g \circ f \overset{not}{=} h : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ *este diferenţiabilă în* c *şi*

$$Dh(c) = D(g \circ f)(c) = Dg(b) \circ Df(c).$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, există o aplicaţie liniară $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)}{\|x - c\|} = 0,$$

deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_{\varepsilon,f} \in \mathbb{R}$, $\delta_{\varepsilon,f} > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta_{\varepsilon,f}$, avem

$$\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|,$$

şi există o aplicaţie liniară $Dg(b) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ astfel ca

$$\lim_{x \to b} \frac{g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)}{\|x - b\|} = 0,$$

deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_{\varepsilon,g} \in \mathbb{R}$, $\delta_{\varepsilon,g} > 0$, astfel încât, pentru orice $y \in D^{'}$, cu proprietatea că $\|y - b\| < \delta_{\varepsilon,g}$, avem

$$\|g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)\| \leq \varepsilon \|y - b\|.$$

Conform propoziţiei de la pagina , există $\gamma, K \in \mathbb{R}$, $\gamma, K > 0$, astfel ca pentru $x \in D$ cu proprietatea $\|x - c\| < \gamma$ să avem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|.$$

De asemenea, aşa cum ne asigură propoziţia de la pagina 227, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca, pentru orice $u \in \mathbb{R}^q$, să avem

$$\|Dg(b)(u)\| \leq M \|u\|.$$

Ca atare, pentru $x \in D$, cu $\|x - c\| < \min\{\gamma, \frac{\delta_{\varepsilon,g}}{K}\}$, avem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \delta_{\varepsilon,g},$$

deci

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - Dg(b)(f(x) - f(c))\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \|f(x) - f(c)\| \leq K\varepsilon \|x - c\|. \qquad (*)$$

Dacă, în plus, $\|x - c\| < \delta_{\varepsilon,f}$, atunci

$$\|Dg(b)(f(x) - f(c) - Df(c)(x - c))\| \leq$$
$$\leq M \|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq M\varepsilon \|x - c\|. \qquad (**)$$

Prin urmare, pentru $x \in D$, cu $\|x - c\| < \min\{\gamma, \frac{\delta_{\varepsilon,g}}{K}, \delta_{\varepsilon,f}\}$, din $(*)$ şi $(**)$, avem

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - (Dg(b) \circ Df(c))(x - c))\| \leq (K + M)\varepsilon \|x - c\|,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Observaţie. *Considerente de algebră liniară ne asigură că în condiţiile teoremei de mai sus, avem:*

$$J_h(c) = J_g(b) J_f(c),$$

adică

$$J_{g \circ f}(c) = J_g(f(c)) J_f(c).$$

Altfel scris,

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_r}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_r}{\partial x_p}(c) \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(b) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(f(c)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(f(c)) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(f(c)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix},$$

de unde

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(c) = \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(c)) \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(c),$$

adică

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(c) =$$

$$= \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(c)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(c)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(c) + ... + \frac{\partial g_i}{\partial y_q}(f(c)) \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(c),$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., r\}$ *şi* $j \in \{1, 2, ..., p\}$.

Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional

Însemnătatea teoremei lui Lagrange din cazul 1-dimensional ne arată că este indicat să studiem un orespondent al acestui rezultat şi pentru cazul multi-dimensional.

Să considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x) = (x - x^2, x - x^3),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru orice $c \in \mathbb{R}$, f este diferenţiabilă în c şi $Df(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, este dată de

$$Df(c)(u) = ((1 - 2c)u, (1 - 3c^2)u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

Să observăm că $f(0) = (0,0)$ şi $f(1) = (0,0)$, dar nu există c, astfel ca $Df(c)(u) = (0,0)$, pentru un u nenul.

Aşadar teorema lui Lagrange nu are un corespondent pentru cazul $q > 1$, chiar dacă $p = 1$.

În multe aplicaţii este suficient să se considere cazul $q = 1$, iar în acestă situaţie teorema lui Lagrange poate fi extinsă.

Mai precis, avem:

Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a şi b este inclus în D, iar funcţia f este diferenţiabilă în orice punct al acestui segment.*

Atunci există un punct c, pe segmentul de capete a şi b, astfel ca

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$

Demonstraţie. Se consideră funcţia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(t) = f((1-t)a + tb),$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Avem

$$\varphi(0) = f(a)$$

şi

$$\varphi(1) = f(b).$$

Mai mult, din teorema de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\varphi^{'}(t) = Df((1-t)a + tb)(b - a).$$

Din teorema lui Lagrange, există $t_0 \in (0,1)$, astfel ca

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(t_0),$$

adică

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a),$$

unde

$$c = (1 - t_0)a + t_0 b.\Box$$

Corolar. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a şi b este inclus în D, iar funcţia f este diferenţiabilă în orice punct al acestui segment.*

Atunci, pentru $y \in \mathbb{R}^q$, există un punct c pe segmentul de capete a şi b astfel ca

$$\{f(b) - f(a)\} \cdot y = \{Df(c)(b-a)\} \cdot y.$$

Demonstraţie. Se aplică rezultatul precedent funcţiei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată de $F(x) = x \cdot y$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$. $\square$

Corolar. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a şi b este inclus în D, iar funcţia f este diferenţiabilă în orice punct al acestui segment.*

Atunci există o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$f(b) - f(a) = L(b-a).$$

Demonstraţie. Să observăm că dacă $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$, atunci $f_i(x) = f(x) \cdot e_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $x \in D$. Aplicând precedentul corolar, există c_i, pe segmentul de capete a şi b, astfel ca

$$f_i(b) - f_i(a) = Df_i(c_i)(b-a) \cdot e_i.$$

Atunci aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ căutată are matricea asociată

$$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_i))_{i=\overline{1,q}, j=\overline{1,p}}. \ \square$$

Observaţie. *Aşa cum am văzut, în general, nu putem alege aceeaşi valoare pentru toate c_i-urile.*

Derivate parţiale de ordin superior. Schimbarea ordinii de derivare

Dacă f este o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, f poate avea p derivate parţiale (de prim ordin) notate cu f_{x_i} sau cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Fiecare dintre aceste derivate parţiale constituie o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, deci poate avea la rândul ei p derivate parţiale, numite derivate parţiale de al doilea ordin, notate $f_{x_i x_j}$ sau cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, adică derivata parţială a lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în raport cu x_j.

În acelaşi mod se definesc derivatele parţiale de al treilea ordin,..., de al n-lea ordin.

Aşadar, f poate avea cel mult p^n derivatele parţiale de al n-lea ordin.

Este de mare importanţă faptul că, dacă aceste derivate parţiale sunt continue, atunci ordinea de derivare nu este importantă. În plus, acest rezultat ne fereşte de existenţa un număr prea mare de notaţii distincte pentru derivatele parţiale. Este suficient să considerăm cazul derivatelor parţiale de doilea ordin pentru funcţii cu domeniul din $\mathbb{R}^2$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$ (pentru rezultate similare celui pe care-l vom prezenta, însă într-un cadru mai larg - de exemplu domeniul din $\mathbb{R}^q$ sau pentru derivate de ordin mai mare decât doi - recomandăm consultarea manualelor [2], [3] şi [4]). Ideea demonstraţiei este de arăta că ambele derivatele parţiale mixte de doilea ordin, în $(0,0)$, sunt limita raportului $\frac{f(h,k)-f(h,0)-f(0,k)+f(0,0)}{hk}$ atunci când (h,k) tinde către $(0,0)$.

Lemă. *Fie* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, *unde* U *este o vecinătate a lui* $(0,0)$, *pentru care* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *există în orice punct din* U *şi astfel ca* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *să fie continuă în* $(0,0)$.

Atunci
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{A(h,k)}{hk},$$
unde
$$A(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0).$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $(h,k) \in U$ cu proprietatea că $|h| < \delta_\varepsilon$ şi $|k| < \delta_\varepsilon$, avem
$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h,k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right| < \varepsilon.$$

Pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ definim, pentru $|h| < \delta_\varepsilon$,
$$B(h) = f(h,k) - f(h,0),$$
deci avem
$$A(h,k) = B(h) - B(0).$$

Teorema lui Lagrange ne asigură că există h_0 (care depinde de k) astfel ca $0 < |h_0| < |h|$ şi
$$A(h,k) = B(h) - B(0) = hB^{'}(h_0).$$

Dar
$$B^{'}(h_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(h_0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(h_0,0).$$

Aplicând iarăşi teorema lui Lagrange membrului drept al egalităţii de mai sus, există k_0 astfel ca $0 < |k_0| < |k|$ şi

$$B^{'}(h_0) = k\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0).$$

Drept urmare, pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ şi $|h| < \delta_\varepsilon$, există h_0 şi k_0 astfel ca $0 < |h_0| < |h|$ şi $0 < |k_0| < |k|$, pentru care

$$\frac{A(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0).$$

Atunci

$$\left| \frac{A(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right| < \varepsilon,$$

pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ şi $|h| < \delta_\varepsilon$, de unde concluzia. □

Teorema lui Schwarz. *Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, unde U este o vecinătate a lui (x,y), pentru care $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din U şi astfel ca $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ să fie continuă în (x,y).*

Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în (x,y) şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Demonstraţie. Putem presupune că $(x,y) = (0,0)$.

Am văzut în lema de mai sus că există $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{A(h,k)}{hk}$ şi că

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{A(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Pe de altă parte, pentru $h \neq 0$, avem

$$\lim_{k\to 0} \frac{A(h,k)}{hk} = \frac{1}{h}(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)).$$

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $(h,k) \in U$ cu proprietatea că $|h| < \delta_\varepsilon$ şi $|k| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{A(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right| < \varepsilon.$$

Trecând la limită în această inegalitate pentru k tinzând către 0, obţinem

$$\left|\frac{1}{h}(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))-\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice h astfel ca $|h|<\delta_\varepsilon$.

Prin urmare există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în $(0,0)$ şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Diferenţiale de ordin superior. Teorema lui Taylor-cazul multidimensional

Dacă f este o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, atunci diferenţiala lui f într-un punct c este o aplicaţie liniară $Df(c)$ din $\mathbb{R}^p$ în $\mathbb{R}$ astfel ca, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, aşa încât pentru orice z, cu proprietatea că $\|z\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$|f(c+z)-f(c)-Df(c)(z)| < \varepsilon \|z\|.$$

Cu alte cuvinte, $Df(c)$ este aplicaţia liniară care aproximează cel mai bine diferenţa $f(c+z)-f(c)$, pentru z "mic".

Orice altă aplicaţie liniară constituie o aproximare mai puţin "bună".

Am văzut că, dacă există, $Df(c)$ este dată de

$$Df(c)(z)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)z_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_p}(c)z_p,$$

unde $z=(z_1,...z_p)\in\mathbb{R}^p$.

Deşi aproximările cu aplicaţii liniare sunt simple şi suficiente pentru multe scopuri, uneori este necesar să obţinem aproximări mai exacte.

Este natural să ne îndreptăm atenţia asupra funcţiilor pătratice, etc.

Întrucât nu vom intra în amănuntele studiului aplicaţiilor multiliniare, vom folosi următoarea:

Definiţie. *Pentru o funcţie* $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$ *astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al doilea ordin ale lui* f *pe o*

vecinătate a lui c, definim diferenţiala de ordin doi a lui f în c, ca fiind aplicaţia, $D^2f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată de

$$D^2f(c)(y,z) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j,$$

pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{R}^p$.

Similar, pentru o funcţie $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al treilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c, definim diferenţiala de ordin trei a lui f în c, ca fiind aplicaţia, $D^3f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată de

$$D^3f(c)(y,z,w) = \sum_{i,j,k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j w_k,$$

pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p), w = (w_1, ..., w_p) \in \mathbb{R}^p$.

Analog se defineşte diferenţiala de orice ordin într-un punct.

Observaţie. *Vom folosi următoarele notaţii:*

$$D^2f(c)(w,w) \overset{not}{=} D^2f(c)(w)^2$$

$$D^3f(c)(w,w,w) \overset{not}{=} D^3f(c)(w)^3$$

....

$$D^nf(c)(w,...,w) \overset{not}{=} D^nf(c)(w)^n.$$

Avem pentru $p = 2$ şi pentru $w = (h,k)$:

$$D^2f(c)(w)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(c)k^2,$$

$$D^3f(c)(w)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}(c)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(c)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(c)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}(c)k^3,$$

$$D^nf(c)(w)^n = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x ... \partial x}(c)h^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x .. \partial x \partial y}(c)h^{n-1}k +$$

$$+C_n^2\frac{\partial^n f}{\partial x..\partial x\partial y\partial y}(c)h^{n-2}k^2+...+\frac{\partial^n f}{\partial y\partial y....\partial y}(c)k^n.$$

Teorema următoare va fi folosită în studiul punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile (vezi pagina 372).

Teorema lui Taylor-cazul multidimensional. *Fie $f:U\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încât pentru orice punct de pe un segment de capete u şi v există o vecinătate a sa pe care există şi sunt continue derivatele parţiale de al $n-$lea ordin ale lui f.*

Atunci există un punct $\overline{u}$ pe segmentul de capete u şi v, astfel ca

$$f(v)=f(u)+\frac{1}{1!}Df(u)(v-u)+\frac{1}{2!}D^2f(u)(v-u)^2+...$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}D^{(n-1)}f(u)(v-u)^{n-1}+\frac{1}{n!}D^nf(\overline{u})(v-u)^n.$$

Demonstraţie. Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, dată de

$$F(t)=f(u+t(v-u)),$$

pentru orice $t\in[0,1]$.

Atunci

$$F^{'}(t)=Df(u+t(v-u))(v-u),$$

$$F^{''}(t)=D^2f(u+t(v-u))(v-u)^2,$$

$$...$$

$$F^{^{(n)}}(t)=D^nf(u+t(v-u))(v-u)^n.$$

Conform cazului 1-dimensional, există $\psi\in[0,1]$ astfel ca

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F^{'}(0)+...+\frac{1}{(n-1)!}F^{^{(n-1)}}(0)+\frac{1}{n!}F^{^{n}}(\psi).$$

Alegem

$$\overline{u}=u+\psi(v-u).\ \square$$

Exerciţii

1. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este dată de

$$f(x,y)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y},$$

pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2. Să se calculeze $Df(1,1)$ pentru $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>0\}\to\mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y)=\ln xy,$$

pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y,z)=2x^2-y+6xy-z^3+3z,$$

pentru orice $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Să se calculeze derivata lui f în origine după direcţiile $(1,2,0)$ şi $(2,1,-3)$.

4. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{array}\right.,$$

pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivatele parţiale de prim ordin în origine, dar că, pentru $\alpha\beta\neq 0$, derivata lui f în origine după direcţia (α,β) nu există.

Să se arate că f nu este mărginită pe nici o vecinătate a originii, deci nu este continuă în origine.

5. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}0, & xy=0\\ 1, & \text{în caz contrar}\end{array}\right.,$$

pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivatele parţiale de prim ordin în origine, dar că, pentru $\alpha\beta\neq 0$, derivata lui f în origine după direcţia (α,β) nu există.

Să se arate că f nu este continuă în origine, deşi este mărginită.

6. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{x^2y}{x^3-y^2}, & x^3-y^2\neq 0\\ 0, & x^3-y^2=0\end{array}\right.,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivata lui f în origine după orice direcţie, dar f nu este continuă în origine, deşi există o vecinătate a originii pe care f este mărginită.

7. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{array},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este continuă şi are derivate parţiale, dar nu este diferenţiabilă în origine.

8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} x^2 + y^2, & x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{array},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este continuă numai în origine, punct în care funcţia este diferenţiabilă.

9. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{array},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este diferenţiabilă în origine, deşi pe nici o vecinătate a originii derivatele sale parţiale nu sunt mărginite, deci derivatele sale parţiale nu sunt continue în origine.

10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$.

Dacă f este diferenţiabilă în c, atunci să se exprime derivata lui f în c după direcţia vectorului unitar $w = (w_1, ..., w_p)$.

Utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, să se arate că există o direcţie după care derivata este maximă şi că acestă direcţie este unică, dacă cel puţin una dintre derivatele parţiale de prim ordin în c este nenulă. Această direcţie se numeşte direcţia gradientul lui f în c.

Arătaţi că există un unic vector v_c astfel încât

$$Df(c)(w) = v_c \cdot w$$

pentru orice vector w de normă 1.

Acest vector, v_c, se numeşte gradientul lui f în c şi se notează $\nabla_c f$ sau $gradf(c)$ şi este dat de

$$(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)).$$

Dacă $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în c, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\nabla_c(\alpha f) = \alpha \nabla_c(f),$$

$$\nabla_c(f + g) = \nabla_c(f) + \nabla_c(g)$$

şi

$$\nabla_c(fg) = (\nabla_c(f))g(c) + f(c)(\nabla_c(g)).$$

11. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|f(x)\| = 1,$$

pentru orice $x \in D$.

Să se arate că

$$f(x) \cdot Df(x)(u) = 0,$$

pentru orice $x \in D$ şi $u \in \mathbb{R}^p$.

În particular, pentru $q = 1$, vectorii $f(x)$ şi $\nabla_x(f)$ sunt perpendiculari pentru orice $x \in D$.

12. Dacă pentru $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ există derivatele parţiale pe D, este f continuă pe D?

13. Dacă pentru $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $c \in D$, există şi este continuă $\frac{\partial f}{\partial x}$ pe D, iar $\frac{\partial f}{\partial y}$ există în c, este f diferenţiabilă în c?

14. a) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{array},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, în origine, există $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, dar că nu sunt egale.

b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \{ \begin{array}{cc} y^2 \ln(1 + \frac{x^2}{y^2}), & y \neq 0 \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{array},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, în origine, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sunt egale, deşi ele nu sunt continue.

15. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă omogenă de grad p (i.e.

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, ..., x_n),$$

pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$).

Să se arate că

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Această relaţie poartă numele de relaţia lui Euler.

Notă istorică. *Leonard Euler* (1707-1783) care a studiat cu *Johann Bernoulli*, a fost unul dintre marii matematicieni ai omenirii (orb pentru o îndelungată perioadă a vieţii) cu o impresionantă operă matematică. Pentru detalii privind biografia acestui titan al matematicii recomandăm articolul *Leonard Euler* (1707-1783), de Ion Chiţescu, Analele Universităţii din Bucureşti, seria matematică, Anul LVI, 2007, Nr. 2, paginile 205-220.

16. Pentru $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, să se arate că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 0.$$

17. Să se arate că o soluţie a ecuaţie

$$xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

este dată de

$$f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2),$$

unde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă.

18. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există toate derivatele parţiale de prim ordin, iar $p - 1$ dintre ele sunt mărginite.

Să se arate că f este continuă pe D.

19. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o funcţie diferenţiabilă care are toate componentele omogene.

Să se arate că dacă există $a \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $Df(a)$ nu este injectivă.

20. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|,$$

pentru orice $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Să se arate că f este diferenţiabilă în $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă $a_i \neq 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Să se scrie, în acest caz, care este $Df(a)$.

REZUMAT

Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi c un punct interior al lui D, iar $u \in \mathbb{R}^p$. Un vector $L_u \in \mathbb{R}^q$, se numeşte derivata lui f, în punctul c, după vectorul u (sau după direcţia u, dacă $\|u\| = 1$), dacă există limita $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$ şi $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t} = L_u$. L_u, dacă există, este unic şi se notează $f_u(c)$ sau $\frac{df}{du}(c)$. Notăm cu f_u sau cu $\frac{df}{du}$ funcţia rezultantă, care are valori în $\mathbb{R}^q$ şi domeniul constând din acele puncte din D, în care există limita $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$. Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi c un punct interior al lui D. Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, unde 1 este pe poziţia i. Atunci, dacă există, $f_{e_i}(c) \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$, respectiv $f_{e_i} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$, se numesc derivata parţială a lui f în c, în raport cu variabila x_i, respectiv derivata parţială a lui f în raport cu variabila x_i.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Spunem că f este diferenţiabilă (sau derivabilă) în c dacă există o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (i.e. $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^p$) astfel ca $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{\|x-c\|} = 0$. L, dacă există, este unică şi se notează cu $Df(c)$ sau $f^{'}(c)$ şi se numeşte diferenţiala (sau derivata) lui f în punctul c.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este diferenţiabilă în c, atunci există $\delta, K \in \mathbb{R}$, $\delta, K > 0$, astfel încît, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$, avem $\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|$. În particular, f este continuă în c.

Pentru $p, q > 1$ şi $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, dacă f este diferenţiabilă în c, atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Mai mult, $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este dată de $Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c)u_p, ..., \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c)u_p)$ pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$. Matricea asociată acestei aplicaţii liniare, pentru perechea de baze canonice, este

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{array} \right).$$

Această matrice se numeşte matricea Jacobi a lui f în c şi se notează $J_f(c)$. Când $p = q$, determinantul acestei matrici poartă numele de Jacobianul lui f în c şi se notează $det\ J_f(c)$ sau $\frac{\partial((f_1, f_2, ..., f_q))}{\partial((x_1, x_2, ..., x_p))} |_{x=c}$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este diferenţiabilă în c, atunci există $\frac{df}{du}(c)$ şi $\frac{df}{du}(c) = DF(c)(u)$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă există V o vecinătate a lui c, pe care există toate derivatele parţiale şi sunt continue în c, atunci f este diferenţiabilă în c.

Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $c \in \overset{\circ}{D}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Dacă f şi g sunt diferenţiabile în c, atunci $h = \alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în c şi $Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$.

b) Dacă f şi g sunt diferenţiabile în c, atunci $k = f \cdot g$ este diferenţiabilă în c şi $Dk(c)(u) = Df(c)(u)g(c) + f(c)Dg(c)(u)$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

c) Dacă φ este diferenţiabilă în c, atunci φf este diferenţiabilă în c şi $D(\varphi f)(c)(u) = D\varphi(c)(u)f(c) + \varphi(c)Df(c)(u)$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to D' \subseteq \mathbb{R}^q$, $c \in \overset{\circ}{D}$ şi $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ astfel ca $f(c) \in \overset{\circ}{D'}$. Dacă f este diferenţiabilă în c iar g diferenţiabilă în $f(c) \overset{not}{=} b$, atunci $g \circ f \overset{not}{=} h : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ este diferenţiabilă în c şi $Dh(c) = D(g \circ f)(c) = Dg(b) \circ Df(c)$. Considerente de algebră liniară ne

asigură că în condiţiile teoremei de mai sus, avem: $J_h(c) = J_g(b)J_f(c)$, **adică** $J_{g\circ f}(c) = J_g(f(c))J_f(c)$, **adică**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_r}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial h_r}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(b) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(b) & ... & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(f(c)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(f(c)) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(f(c)) & ... & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(f(c)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix},$$

de unde $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(c) = \sum\limits_{l=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(c))\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(c)$, **adică** $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(c))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(c))\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(c) + ... + \frac{\partial g_i}{\partial y_q}(f(c))\frac{\partial f_q}{\partial x_j}(c)$, **pentru orice** $i \in \{1, 2, ..., r\}$ **şi** $j \in \{1, 2, ..., p\}$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ **şi** $a, b \in D$ **astfel încât segmentul de capete** a **şi** b **este inclus în** D, **iar funcţia** f **este diferenţiabilă în orice punct al acestui segment. Atunci există un punct** c, **pe segmentul de capete** a **şi** b, **astfel ca** $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$.

Dacă f **este o funcţie cu domeniul din** $\mathbb{R}^p$ **şi codomeniul din** $\mathbb{R}$, f **poate avea** p **derivate parţiale (de prim ordin) notate cu** f_{x_i} **sau cu** $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. **Fiecare dintre aceste derivate parţiale constituie o funcţie cu domeniul din** $\mathbb{R}^p$ **şi codomeniul din** $\mathbb{R}$, **deci poate avea la rândul ei** p **derivate parţiale, numite derivate parţiale de al doilea ordin, notate** $f_{x_i x_j}$ **sau cu** $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, **adică derivata parţială a lui** $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ **în raport cu** x_j. **În acelaşi mod se definesc derivatele parţiale de al treilea ordin,...,de al** n**-lea ordin.**

Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y)$, **unde** U **este o vecinătate a lui** (x, y), **pentru care** $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ **şi** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ **există în orice punct din** U **şi astfel ca** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

să fie continuă în (x, y). Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în (x, y) şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Pentru o funcţie $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al doilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c, definim diferenţiala de ordin doi a lui f în c, ca fiind aplicaţia, $D^2 f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată de $D^2 f(c)(y, z) = \sum\limits_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j$, pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{R}^p$.

Similar, pentru o funcţie $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al treilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c, definim diferenţiala de ordin trei a lui f în c, ca fiind aplicaţia, $D^3 f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată de $D^3 f(c)(y, z, w) = \sum\limits_{i,j,k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j w_k$, pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p)$, $w = (w_1, ..., w_p) \in \mathbb{R}^p$. Analog se defineşte diferenţiala de orice ordin într-un punct. Vom folosi următoarele notaţii: $D^2 f(c)(w, w) \overset{not}{=} D^2 f(c)(w)^2$, $D^3 f(c)(w, w, w) \overset{not}{=} D^3 f(c)(w)^3$,..., $D^n f(c)(w, ..., w) \overset{not}{=} D^n f(c)(w)^n$.

Avem pentru $p = 2$ şi pentru $w = (h, k)$: $D^2 f(c)(w)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(c) k^2$, $D^3 f(c)(w)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}(c) h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(c) h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(c) hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}(c) k^3$, ..., $D^n f(c)(w)^n = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x ... \partial x}(c) h^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x .. \partial x . \partial y}(c) h^{n-1} k + C_n^2 \frac{\partial^n f}{\partial x .. \partial x . \partial y \partial y}(c) h^{n-2} k^2 + ... + \frac{\partial^n f}{\partial y \partial y .... \partial y}(c) k^n$.

Fie o funcţie $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice punct de pe un segment de capete u şi v există o vecinătate a sa, pe care există şi sunt continue derivatele parţiale de al $n-$lea ordin ale lui f. Atunci există $\overline{u}$ un punct pe segmentul de capete u şi v, astfel ca $f(v) = f(u) + \frac{1}{1!} D f(u)(v - u) + \frac{1}{2!} D^2 f(u)(v - u)^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)} f(u)(v - u)^{n-1} + \frac{1}{n!} D^n f(\overline{u})(v - u)^n$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică II,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

4. **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti* - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

TEOREMELE CLASICE ALE DIFERENŢIABILITĂŢII

Noţiune de funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$
Teorema de injectivitate locală
Teorema de surjectivitate locală
Teorema de inversiune locală
Teorema funcţiilor implicite

În prima parte a acestei secţiuni vom arăta că pentru o funcţie diferenţiabilă într-un punct, caracterul local al acestei funcţii este determinat de către diferenţiala funcţiei în punctul respectiv. Mai precis, dacă diferenţiala funcţiei în punctul considerat este injectivă, atunci există o vecinătate a punctului pe care funcţia este injectivă; dacă diferenţiala funcţiei în punctul c este surjectivă, atunci există o vecinătate U a lui c şi o vecinătate V a lui $f(c)$ astfel ca $f : U \to V$ să fie surjectivă. Drept consecinţe obţinem unele teoreme de inversiune şi teorema funcţiilor implicite.

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă derivatele parţiale de prim ordin există şi sunt continue în c, spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ în c. Dacă $D_0 \subseteq D$ şi f este de clasă $\mathcal{C}^1$ în orice punct din D_0, atunci spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D_0.*

Observaţie. *Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe mulţimea deschisă D, atunci f este diferenţiabilă pe D. Vom arăta în continuare că, în ipotezele de mai sus, diferenţiala funcţiei variază în mod continuu.*

Lema 1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, atunci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că*

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Demonstraţie. Din continuitatea derivatelor parţiale deducem că, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., q\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., p\}$, de unde concluzia. $\square$

Lemă de aproximare. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$. *Dacă* f *este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D, *atunci pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, *astfel ca pentru orice* $x_1, x_2 \in D$, *cu proprietatea că*

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Demonstraţie. Conform lemei anterioare, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Pentru $x_1, x_2 \in D$, cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta_\varepsilon,$$

alegem $w \in \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|w\| = 1$$

şi

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| = \{f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Funcţia $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată, pentru orice $t \in [0, 1]$, de

$$F(t) = \{f(t(x_1 - x_2) + x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

este diferenţiabilă pe $(0,1)$ şi

$$F^{'}(t) = \{Df(t(x_1 - x_2) + x_2)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

$$F(0) = \{f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

$$F(1) = \{f(x_1) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Există $\psi \in (0,1)$ astfel încât $F(1) - F(0) = F^{'}(\psi)$.

Pentru $\overline{x} = \psi(x_1 - x_2) + x_2$, avem

$$\{f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w = \{Df(\overline{x})(x_1 - x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Deoarece

$$\|\overline{x} - c\| < \delta_{\varepsilon},$$

folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq$$

$$\leq \|Df(\overline{x})(x_1 - x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|(x_1 - x_2)\| . \ \square$$

Teorema de injectivitate locală

Vom arăta în cele ce urmează că dacă o funcţie este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a unui punct c şi dacă $Df(c)$ este injectivă, atunci există o vecinătate a lui c pe care f este injectivă; în contextul de mai sus, spunem că f este local injectivă.

Teorema de injectivitate locală. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$. *Dacă* f *este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D *şi* $Df(c)$ *este injectivă, atunci există* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *astfel încât* $f_{|U}$ *este injectivă, unde* $U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - c\| \leq \delta\}$.

Demonstraţie. Deoarece $Df(c)$ este injectivă, conform corolarului de la pagina 236, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel încât, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, avem

$$r \|z\| \leq \|Df(c)(z)\| .$$

Lema de aproximare, pentru $\varepsilon = \frac{r}{2}$, ne asigură că există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât, avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{r}{2} \|x_1 - x_2\| ,$$

pentru orice $x_1, x_2 \in D$, cu proprietatea că $\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta$, şi, drept urmare, obţinem

$$\|Df(c)(x_1 - x_2)\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{r}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

de unde

$$r\|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{r}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

i.e.

$$\frac{r}{2}\|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

pentru orice $x_1, x_2 \in U$, deci $f_{|U}$ este injectivă. $\square$

Observaţie. *Prin urmare $f_{|U} : U \to f(U)$ este inversabilă. Teorema de mai jos, care se bazează pe Teorema de continuitate a inversei pentru funcţii continue (vezi pagina 237), arată că această inversă este continuă.*

Teorema de inversiune locală (forma slabă). *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi $Df(c)$ este injectivă, atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât $f_{|U} : U \to f(U)$ este inversabilă şi inversa sa este continuă, unde $U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - c\| \leq \delta\}$.*

Observaţie. *Teorema de mai sus poartă numele de Teorema de inversare locală (forma slabă) deoarece are două slabiciuni, anume $(f_{|U})^{-1} : f(U) \to U$ nu are domeniul de definiţie, în mod necesar, o vecinătate a lui $f(c)$ şi, în plus, deşi ipoteza implică diferenţiabilitatea lui f, concluzia nu menţionează nimic relativ la diferenţiabilitatea inversei lui f.*

Teorema de surjectivitate locală

Rezultatul din această secţiune este complementar celui din secţiunea anterioară. El afirmă că dacă o funcţie este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a unui punct c şi $Df(c)$ este surjectivă, atunci există U, o vecinătate a lui c, şi V, o vecinătate a lui $f(c)$, astfel ca $f : U \to V$ să fie surjectivă. Cu alte cuvinte, orice punct din $\mathbb{R}^q$ care este suficient de apropiat de $f(c)$ este imaginea, prin f, a unui punct apropiat de c. Pentru a demonstra acest rezultat, vom arăta pentru început că el este valabil pentru aplicaţii liniare, iar apoi pentru funcţii care pot fi aproximate cu aplicaţii liniare.

Lemă. *Dacă $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o aplicaţie liniară şi surjectivă, atunci există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$ există $x \in \mathbb{R}^p$ cu proprietatea că*

$$\|x\| \leq m \|y\|$$

şi

$$L(x) = y.$$

Demonstraţie. Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., q\}$,

$$e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^q,$$

unde i este pe poziţia i.

Există $u_i \in \mathbb{R}^p$ astfel ca

$$L(u_i) = e_i.$$

Atunci, pentru orice $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$, avem

$$L(x) = y,$$

unde

$$x = y_1 u_1 + ... + y_q u_q.$$

Mai mult,

$$\|x\| \leq m \|y\|,$$

unde

$$m = \{\sum_{j=1}^{q} |u_i|^2\}^{\frac{1}{2}}. \square$$

Lemă. *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ şi $g : D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| < \alpha\} \to \mathbb{R}^q$ continuă astfel ca $g(0) = 0$. Fie $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicaţie liniară şi surjectivă şi $m \in \mathbb{R}$ ca în lema precedentă. Presupunem că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$, avem*

$$\|g(x_1) - g(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|.$$

Atunci, pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$, astfel ca

$$\|y\| < \beta = \frac{\alpha}{2m},$$

există $x \in D$ *cu proprietatea că*

$$g(x) = y.$$

Demonstraţie. Pentru $y \in \mathbb{R}^q$, astfel ca $\|y\| < \beta = \frac{\alpha}{2m}$, fie $x_0 = 0$ şi $y_0 = y$.

Conform lemei precedente există $x_1 \in \mathbb{R}^p$, astfel ca

$$y_0 = L(x_1 - x_0)$$

şi

$$\|x_1 - x_0\| \leq m \|y\| .$$

Atunci $x_1 \in D$.

Fie

$$y_1 = y_0 + g(x_0) - g(x_1) = -\{g(x_1) - g(x_0) - L(x_1 - x_0)\}.$$

Avem

$$\|y_1\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2} \|y\| .$$

Din nou, lema de anterioară ne asigură că există $x_2 \in \mathbb{R}^p$, astfel ca

$$y_1 = L(x_2 - x_1)$$

şi

$$\|x_2 - x_1\| \leq m \|y_1\| .$$

Atunci

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{2} \|x_1\| ,$$

de unde

$$\|x_2\| \leq \frac{3}{2} \|x_1\| < \frac{3}{4}\alpha,$$

şi, prin urmare, $x_2 \in D$.

Să presupunem că am ales $0 = x_0, x_1, ..., x_n \in D$ şi $y = y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}^q$ astfel încât, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, avem

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq m \|y_{k-1}\| \leq \frac{m}{2^{k-1}} \|y\| , \tag{*}$$

$$y_{k-1} = L(x_k - x_{k-1})$$

şi

$$y_k = y_{k-1} + g(x_{k-1}) - g(x_k). \tag{**}$$

Să observăm că

$$\|y_n\| = \|y_{n-1} + g(x_{n-1}) - g(x_n)\| = \|g(x_{n-1}) - g(x_n) - L(x_n - x_{n-1})\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2m} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{2m} m \|y_{n-1}\| \leq \frac{1}{2^n} \|y\|$$

şi că

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + ... + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq$$

$$\leq m \|y\| (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + ... + \frac{1}{2} + 1) < 2m \|y\| < \alpha.$$

Alegem x_{n+1} astfel ca

$$y_n = L(x_{n+1} - x_n)$$

şi

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m \|y_n\|.$$

Ca mai sus, deducem că

$$\|x_{n+1}\| < \alpha,$$

deci $x_{n+1} \in D$.

Definim

$$y_{n+1} = y_n + g(x_n) - g(x_{n+1});$$

avem

$$\|y_{n+1}\| = \|g(x_{n+1}) - g(x_n) - L(x_{n+1} - x_n)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_{n+1} - x_n\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2m} m \|y_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|y\|.$$

Se constată uşor, folosind $(*)$, că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy, deci el converge către un element $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\|x\| \leq 2m \|y\| < \alpha,$$

deci $x \in D$.

Pe de altă parte, cum, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{2^n} \|y\|,$$

şirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către $0_{\mathbb{R}^q}$.

De asemenea

$$y_n = y - g(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (vezi (**)).

Deoarece g este continuă, obţinem

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = y,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Teorema de mai jos se va folosi în decursul demonstraţiei Teoremei multiplicatorilor lui Lagrange (vezi pagina 376).

Teorema de surjectivitate locală. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi $Df(c)$ este surjectivă, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că $\|y - f(c)\| < \beta$, există $x \in \mathbb{R}^p$ aşa încât $\|x - c\| < \alpha$ şi $f(x) = y$.*

Demonstraţie. Fie m generat de lema de mai sus pentru aplicaţia liniară surjectivă $Df(c)$.

Conform lemei de aproximare, există $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, astfel ca pentru orice $x_1, x_2 \in D$, cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \alpha,$$

avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|.$$

Fie $g : D_0 = \{z \in \mathbb{R}^p \mid \|z\| < \alpha\} \to \mathbb{R}^q$, dată de

$$g(z) = f(z + c) - f(c),$$

pentru orice $z \in D_0$.

g este continuă şi

$$g(0) = 0.$$

Mai mult, pentru $z_1, z_2 \in D$, alegând $x_1 = z_1 + c$ şi $x_2 = z_2 + c$, avem

$$x_1 - x_2 = z_1 - z_2$$

şi

$$g(z_1) - g(z_2) = f(x_1) - f(x_2),$$

deci

$$\|g(z_1) - g(z_2) - Df(c)(z_1 - z_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|z_1 - z_2\| .$$

Pentru $y \in \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|y - f(c)\| < \beta = \frac{\alpha}{2m},$$

considerăm $w = y - f(c)$ şi avem

$$\|w\| < \beta.$$

În concordanţă cu lema anterioară, există $z \in \mathbb{R}^p$, $\|z\| < \alpha$ astfel ca

$$g(z) = w.$$

Dacă considerăm $x = c + z$, avem

$$\|x - c\| = \|z\| < \alpha$$

şi

$$w = g(z) = f(z + c) - f(c) = f(x) - f(c),$$

deci

$$f(x) = w + f(c) = y. \ \square$$

Teorema aplicaţiei deschise. *Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D astfel ca $Df(x)$ este surjectivă, pentru orice $x \in D$. Atunci $f(D)$ este deschisă. Mai mult, pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq D$, $f(G)$ este deschisă.*

Demonstraţie. Fie $c \in G$. Atunci, conform teoremei de surjectivitate locală, există o bilă deschisă cu centrul în $f(c)$ inclusă în $f(G)$. $\square$

Teorema de inversiune locală

Vom combina cele două rezultate anterioare, pentru cazul în care $p = q$ şi $Df(c)$ este injectivă şi surjectivă (pentru a fi mai precişi să menţionăm că o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este injectivă dacă şi numai dacă este surjectivă). Mai mult, aceste proprietăţi au loc dacă şi numai dacă matricea asociată are determinantul nenul. În particular, $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este injectivă dacă şi numai dacă este surjectivă dacă şi numai dacă $\det Jf(c) \neq 0$.

Teorema de inversiune locală. *Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, $c \in D$, astfel încât $Df(c)$ este bijectivă.*

Atunci există o vecinătate U a lui c, cu proprietatea că $V = f(U)$ este o vecinătate a lui $f(c)$, $f : U \to V$ este bijectivă, iar $g = f^{-1} : V \to U$ este continuă.

Mai mult, g este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V şi dacă $y \in V$, iar $x = g(y) \in U$, atunci

$$Dg(y) = D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

Demonstraţie. Deoarece $Df(c)$ este injectivă, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, avem

$$2r \|z\| \leq \|Df(c)z\|$$

(vezi corolarul de la pagina 236).

Conform lemei 1, există o vecinătate U_0 a lui c pe care f este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi astfel încât, pentru orice x din această vecinătate, avem

$$r \|z\| \leq \|Df(x)z\|, \tag{*}$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

În continuare, ne vom restrânge la o vecinătate (deschisă) U a lui c, $U \subseteq U_0$, pe care f este injectivă şi care este conţinută în bila cu centrul în c şi de rază α din teorema de surjectivitate locală.

Atunci, conform teoremei aplicaţiei deschise, ţinând cont că $Df(x)$ este injectivă, deci surjectivă, pentru orice $x \in U$, $V = f(U)$ este o vecinătate (deschisă) a lui $f(c)$.

Mai mult, având în vedere Teorema de inversiune locală (forma slabă),

$$g = (f)^{-1} : f(U) = V \to U$$

este continuă.

Pentru arăta că g este derivabilă în $y = f(x) \in V$, unde $x \in U$, fie $y_1 = f(x_1) \in V$, unde $x_1 \in U$.

Cum f este diferenţiabilă în x, avem

$$f(x_1) - f(x) - Df(x)(x_1 - x) = u(x_1) \|x_1 - x\|,$$

unde

$$\lim_{x_1 \to x} \|u(x_1)\| = 0.$$

Dacă $M_x = (Df(x))^{-1}$, atunci

$$x_1 - x = M_x \circ Df(x)(x_1 - x) = M_x(f(x_1) - f(x) - u(x_1) \|x_1 - x\|),$$

adică

$$g(y_1) - g(y) - M_x(y_1 - y) = - \|x_1 - x\| M_x(u(x_1)). \qquad (**)$$

Deoarece $Df(x)$ este injectivă rezultă, similar cu demonstraţia de la teorema de injectivitate locală, că

$$\|y_1 - y\| = \|f(x_1) - f(x)\| \geq \frac{r}{2} \|x_1 - x\|, \qquad (***)$$

pentru y suficient de apropiat de y_1.

Mai mult, din $(*)$, deducem că

$$\|M_x(u)\| \leq \frac{1}{r} \|u\|,$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Prin urmare, folosind (**) şi (***), obţinem

$$\|g(y_1) - g(y) - M_x(y_1 - y)\| \leq \|x_1 - x\| \frac{1}{r} \|u(x_1)\| \leq \frac{2}{r^2} \|u(x_1)\| \|y_1 - y\|.$$

Ca urmare, g este diferenţiabilă în $y = f(x)$ şi

$$Dg(y) = M_x = (Df(x))^{-1}.$$

Rămâne de arătat că g este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V.

Fie $z \in \mathbb{R}^p$ şi x, x_1, y, y_1 ca mai sus.

Atunci, cum $Dg(y) \circ Df(x) = Dg(y_1) \circ Df(x_1) = Id_{\mathbb{R}^p}$, avem

$$Dg(y)(z) - Dg(y_1)(z) = Dg(y) \circ [Df(x_1) - Df(x)] \circ Dg(y_1)(z).$$

Cum f este de clasă $\mathcal{C}^1$, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca, pentru $\|x_1 - x\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\|Df(x_1)(w) - Df(x)(w)\| \leq \varepsilon \|w\|,$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$.

Mai mult, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\|Dg(y_1)(u)\| \leq \frac{1}{r}\|u\|$$

şi

$$\|Dg(y)(u)\| \leq \frac{1}{r}\|u\|.$$

Prin urmare, pentru y_1 suficient de aproape de y,

$$\|Dg(y)(z) - Dg(y_1)(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{r^2}\|z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, de unde $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ sunt continue în y, adică g este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V.

Exerciţii

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x + y, 2x + ay),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculaţi Df.

Să se arate că Df este injectivă dacă şi numai dacă este surjectivă, iar acest fapt are loc dacă şi numai dacă $a \neq 2$.

Să se determine imaginea prin f a mulţimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1$ şi $0 \leq y \leq 1\}$ pentru $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 3$.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x, xy) = (u, v),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se traseze curbele $x = ct$, $y = ct$ (în reperul uOv), $u = ct$ şi $v = ct$ (în reperul xOy).

Este f injectivă? Dar surjectivă?

Să se arate că pentru $x \neq 0$ există o vecinătate a lui (x, y) pe care f este injectivă şi astfel ca imaginea prin f a acestei vecinătăţi să fie o vecinătate a lui $f(x)$.

Care este imaginea prin f a mulţimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2$ şi $0 \leq y \leq 2\}$?

Dar preimaginea prin f a mulţimii $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2$ şi $0 \leq v \leq 2\}$?

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se traseze curbele $x = ct$, $y = ct$ (în reperul uOv), $u = ct$ şi $v = ct$ (în reperul xOy).

Să se arate că orice $(u, v) \neq (0, 0)$ este imaginea prin f a doua puncte (x, y), deci f nu este injectivă.

Să se arate că f este local injectivă în orice punct diferit de $(0, 0)$.

Care este imaginea prin f a mulţimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 1$ şi $0 \leq y \leq 1\}$?

Dar preimaginea prin f a mulţimii $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2$ şi $0 \leq v \leq 2\}$?

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} .$$

Să se arate că $Df(0)$ este injectivă, dar că f nu are inversă în jurul lui $(0, 0)$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ inversabilă. Este adevărat că $Df(x)$ este bijectivă, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$?

6. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ diferenţiabilă pe o vecinătate a lui c, astfel încât $Df(c)$ are inversă. Este adevărat că f are inversă în jurul lui c?

7. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ diferenţiabilă în c, astfel încât are inversă diferenţiabilă în $f(c)$. Este adevărat că $Df(c)$ este injectivă?

8. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenţiabilă pe o vecinătate a lui c astfel încât pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca, pentru $\|x - c\| < \delta_\varepsilon$, avem $\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Să se arate că f are derivate parţiale continue în c.

9. Fie $L_0 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicaţie liniară şi injectivă. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ astfel încât, orice aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu proprietatea că $\|L(z) - L_0(z)\| \leq \alpha \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, este injectivă.

10. Fie $L_0 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicaţie liniară şi surjectivă. Să se arate că există $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ astfel încât orice aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu proprietatea că $\|L(z) - L_0(z)\| \leq \beta \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, este surjectivă.

11. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, pentru orice $x_0 > 0$, există o vecinătate a lui (x_0, y_0) pe care f este injectivă, dar că există o infinitate de puncte care au ca imagine, prin f, pe $f(x_0, y_0)$.

Teorema funcţiilor implicite

Să considerăm o funcţie F definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$.

Identificând pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu $\mathbb{R}^{p+q}$ nu este necesar să definim ce înseamnă că F este continuă, diferenţiabilă sau de clasă $\mathcal{C}^1$ într-un punct.

Să presupunem că

$$F(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Problema funcţiilor implicite este de a rezolva ecuaţia

$$F(x, y) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

pentru una dintre variabile, să zicem x, în termeni de cealaltă variabilă, i.e. să găsim o funcţie φ, definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, astfel ca

$$\varphi(y_0) = x_0$$

şi

$$F(\varphi(y), y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

pentru orice y din domeniul de definiţie al lui φ.

Este natural să presupunem că F este continuă într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) şi să sperăm că φ este continuă într-o vecinătate a lui y_0.

Chiar dacă F este de clasă $\mathcal{C}^1$ într-o vecinătate a lui (x_0, y_0), existenţa şi unicitatea unei soluţii continue φ pe o vecinătate a lui y_0 nu este asigurată.

Spre exemplu, pentru $p = q = 1$ şi pentru funcţia

$$F(x, y) = x^2 - y^2,$$

avem două soluţii continue corespunzătoare punctului $(0,0)$, anume

$$\varphi_1(y) = y$$

şi

$$\varphi_2(y) = -y;$$

de asemenea avem soluţii discontinue, ca de exemplu

$$\varphi_3(y) = \{ \begin{array}{cc} y, & y \in \mathbb{Q} \\ -y, & y \notin \mathbb{Q} \end{array} .$$

Funcţia

$$G(x,y) = y - x^2$$

are două două soluţii continue corespunzătoare punctului $(0,0)$, dar nici una dintre ele nu este definită pe o vecinătate a lui $(0,0)$.

Funcţia

$$H(x,y) = \{ \begin{array}{cc} 0, & x = 0 \\ y - x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \end{array} ,$$

este de clasă $\mathcal{C}^1$ într-o vecinătate a lui $(0,0)$, dar nu are nici o soluţie continuă definită pe o vecinătate a lui $y = 0$.

Pentru toate aceste trei exemple, derivata parţială în raport cu variabila x se anulează în punctul considerat.

În cazul $p = q = 1$ condiţia suplimentară care trebuie impusă pentru a asigura existenţa şi unicitatea soluţiei este ca această derivată parţială în raport cu variabila x să nu se anuleze în punctul considerat.

În cazul general, să observăm că derivata $DF(x_0, y_0)$ este o aplicaţie liniară din $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ în $\mathbb{R}^p$ care induce o aplicaţie liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, dată de

$$L(u) = DF(x_0, y_0)(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

L este derivata parţială a lui F în raport cu x în punctul (x_0, y_0).

Condiţia suplimentară care trebuie impusă pentru a asigura existenţa şi unicitatea soluţiei este ca L să fie bijectivă.

Utilizând o eventuală translaţie, se poate presupune, fără pierderea generalităţii, că $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Problema de mai sus poate fi interpretată şi în termeni de coordonate astfel:

dacă $x = (x_1, ..., x_p)$ şi $y = (y_1, ..., y_q)$, ecuaţia

$$F(x, y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

capătă forma unui sistem de p ecuaţii cu $p + q$ necunoscute, anume

$$x_1, ..., x_p$$

şi

$$y_1, ..., y_q;$$

mai precis, avem

$$f_1(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_q) = 0$$

$$...$$

$$f_p(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_q) = 0.$$

Se înţelege aici că sistemul este verificat de $(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_q) = (0, 0, ..., 0 : 0, ...0)$ şi că dorim să aflăm $x_1, ..., x_p$ în funcţie de $y_1, ..., y_q$, cel puţin pentru cazul în care y_j-urile sunt mici.

Se presupune că derivatele parţiale ale funcţiilor f_i în raport cu toate cele $p + q$ variabile sunt continue în vecinătatea lui zero şi că

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_p)}{\partial(x_1, ..., x_p)}_{|(0,...,0)} \neq 0.$$

Atunci vom arăta că există funcţiile $\varphi_1, ..., \varphi_p$ continue în $(y_1, ...y_q) = (0, ..., 0)$ astfel că dacă vom înlocui în sistemul iniţial pe x_1 cu $\varphi_1(y_1, ...y_q)$,..., pe x_p cu $\varphi_p(y_1, ...y_q)$, obţinem o identitate în $y_1, ...y_q$.

Teorema funcţiilor implicite. *Fie F o funcţie, definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$.*

Să presupunem că $F(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ şi că aplicaţia liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, dată de

$$L(u) = DF(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$, este bijectivă.

Atunci există o funcţie φ, definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate W a lui $0_{\mathbb{R}^q}$, astfel ca

$$\varphi(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^q}$$

şi

$$F(\varphi(y), y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

pentru orice $y \in W$.

Demonstraţie. Fie funcţia dată de

$$H(x, y) = (F(x, y), y),$$

definită pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$ cu valori în $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

H de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$ şi

$$DH(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, v) = (DF(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, v), v).$$

Deoarece L este bijectivă,

$$DH(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q}) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

este bijectivă.

În conformitate cu teorema de inversiune locală, există o vecinătate U a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, aşa încât $V = H(U)$ este o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, $H : U \to V$ este bijectivă, iar inversa sa, $G : V \to U$, este continuă.

Mai mult, G este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V, iar diferenţiala sa, într-un punct din V, este inversa diferenţialei lui H în punctul corespunzător din U.

Funcţia G este dată de

$$G(x, y) = (G_1(x, y), y),$$

unde G_1 este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V, cu valori în $\mathbb{R}^p$.

Fie W o vecinătate a lui $0_{\mathbb{R}^q}$ astfel încât, dacă $y \in W$, atunci $(0_{\mathbb{R}^p}, y) \in V$ şi fie $\varphi : W \to \mathbb{R}^p$, dată de

$$\varphi(y) = G_1(0_{\mathbb{R}^p}, y),$$

pentru orice $y \in W$.

Pentru $(x, y) \in V$, avem

$$(x, y) = (H \circ G)(x, y) = H(G_1(x, y), y) =$$

$$= (F(G_1(x, y), y), y).$$

În particular, pentru $x = 0_{\mathbb{R}^p}$, obţinem

$$(0_{\mathbb{R}^p}, y) = (F(\varphi(y), y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Prin urmare

$$0_{\mathbb{R}^p} = F(\varphi(y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Deoarece G_1 este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V, rezultă că φ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe W.

$\square$

Observaţie. *Este util să avem o formulă explicită pentru diferenţiala lui φ. În acest scop, să introducem derivatele parţiale ale lui F. Pentru $(a, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ suficient de aproape de $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, definim $D_xF(a, b) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ ca fiind aplicaţia liniară definită prin*

$$D_xF(a, b)(u) = DF(a, b)(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Similar $D_yF(a, b) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ este aplicaţia liniară definită prin

$$D_yF(a, b)(v) = DF(a, b)(0_{\mathbb{R}^q}, v),$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$.

Să observăm că

$$DF(a, b)(u, v) = D_xF(a, b)(u) + D_yF(a, b)(v). \qquad (*)$$

Corolar. *În condiţiile teoremei de mai sus, pentru orice $y \in W$, $D\varphi(y) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ este aplicaţia liniară definită prin*

$$D\varphi(y) = -(D_xF(\varphi(y), y))^{-1} \circ (D_yF(\varphi(y), y)).$$

Demonstraţie. Fie $K : W \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ definită prin

$$K(y) = (\varphi(y), y).$$

Atunci $F \circ K$ este $0_{\mathbb{R}^p}$ pe W.

Mai mult, pentru orice $y \in W$, avem

$$DK(y)(v) = (D\varphi(y)(v), v),$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^q$.

Atunci
$$0_{\mathbb{R}^p} = D(F \circ K)(y),$$
de unde, folosind (*), obţinem
$$0_{\mathbb{R}^p} = D_x F(\varphi(y), y) \circ D\varphi(y) + D_y F(\varphi(y), y),$$
pentru orice $y \in W$.

Ţinând cont de faptul că $D_x F(\varphi(y), y)$ este inversabilă, se deduce concluzia.

Exerciţii

1. Fie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de
$$F(x, y) = x^2 - y,$$
pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să se arate că este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui $(0, 0)$, dar că pentru nici o vecinătate a lui $(0, 0)$ nu există o funcţie continuă φ astfel ca $F(\varphi(y), y) = 0$.

2. Fie $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de
$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1^2 - x_2 y_1 + y_2, x_1 y_2 + x_2^3 - y_1),$$
pentru orice $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să se determine punctele $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în jurul cărora poate fi rezolvată ecuaţia $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}^2})$, aflând x ca funcţie de y.

Să se calculeze diferenţiala soluţiei.

3. Să se aplice teorema funcţiilor implicite pe următoarele "contexte":

i) $u + v = x + y$, $xu + yv = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ $=?$.

ii) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$, $dz =?$.

iii) $(y + z)\sin z - y(x + z) = 0 \Rightarrow zsinz\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Pentru
$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$
$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$
$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

unde $r \in [0, R]$, φ_1, ..., $\varphi_{n-2} \in [0, \pi]$, $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]$, să se determine

$$\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(r, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})}.$$

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă derivatele parţiale de prim ordin există şi sunt continue în c spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ în c. Dacă $D_0 \subseteq D$ şi f este de clasă $\mathcal{C}^1$ în orice punct din D_0, atunci spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D_0.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi $Df(c)$ este injectivă, atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât $f_{|U}$ este injectivă, unde $U = \{x \in R^p \mid \|x - c\| \leq \delta\}$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi $Df(c)$ este surjectivă, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că $\|y - f(c)\| < \beta$, există $x \in R^p$ aşa încât $\|x - c\| < \alpha$ şi $f(x) = y$.

Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D astfel ca $Df(x)$ este surjectivă, pentru orice $x \in D$. Atunci $f(D)$ este deschisă. Mai mult, pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq D$, $f(G)$ este deschisă.

Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, $c \in D$, astfel încât $Df(c)$ este injectivă. Atunci există U, o vecinătate a lui c, cu proprietatea că $V = f(U)$ este o vecinătate a lui $f(c)$, $f : U \to V$ este bijectivă, iar $g = f^{-1} : V \to U$ este continuă. Mai mult, g este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V şi dacă $y \in V$, iar $x = g(y) \in U$, atunci $Dg(y) = D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

Fie F o funcţie, definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$. Să presupunem că $F(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ şi că aplicaţia liniară $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, dată de $L(u) = DF(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, 0_{\mathbb{R}^q})$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$, este bijectivă. Atunci există o funcţie φ, definită pe o submulţime a lui $\mathbb{R}^q$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate W a lui $0_{\mathbb{R}^q}$, astfel ca $\varphi(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^q}$ şi $F(\varphi(y), y) = 0_{\mathbb{R}^p}$, pentru orice $y \in W$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I,** Editura Universităţii din Bucureşti, 1999 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 39214.

3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

PUNCTE DE EXTREM

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional
Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile
Extreme cu legături. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

În continuare vom discuta problema stabilirii punctelor de extrem ale unei funcţii cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, precum şi metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru a determina punctele de extrem ale unei funcţii care are variabilele supuse la diverse restricţii.

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional

Prezentăm un analog al teoremei lui Fermat pentru funcţii de mai maulte variabile.

Definiţie. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$, *unde* $D \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi* $c \in D$.

Punctul c *se numeşte punct de maxim local (relativ) al funcţiei* f, *dacă există* $\delta > 0$, *astfel încât pentru orice* $x \in B(c, \delta) \cap D$, *avem*

$$f(c) \geq f(x).$$

Punctul c *se numeşte punct de minim local (relativ) al funcţiei* f, *dacă există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(c, \delta) \cap D$, *avem*

$$f(c) \leq f(x).$$

Punctele de maxim local şi cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in \overset{\circ}{D}$. *Dacă* c *este un punct de extrem local al lui* f, *iar* f *este diferenţiabilă în* c, *atunci*

$$Df(c) = 0.$$

Demonstraţie. Orice restricţie a lui f, la o dreaptă, care trece prin c, are un punct de extrem în c.

Prin urmare, teorema lui Fermat ne asigură că derivata în c, după orice direcţie, este nulă.

În particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) = 0,$$

de unde

$$Df(c) = 0. \ \Box$$

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă $Df(c) = 0$, atunci c se numeşte punct critic al lui f.*

Observaţie. *Nu orice punct critic este punct de extrem, aşa cu arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de $f(x, y) = xy$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, şi $c = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Un astfel de punct, care este critic, dar nu este de extrem local, poartă numele de punct şa. În acest exemplu, f restricţionată la anumite drepte, ce trec prin origine, are un punct de minim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ şi restricţionată la anumite drepte, ce trec prin origine, are un punct de maxim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Este posibil ca o funcţie restricţionată la orice dreaptă, care trece printr-un punct critic al funcţiei, să aibă puncte de minim relativ. Prin urmare este util să dispunem de un criteriu pentru a stabili dacă un punct critic este punct de extrem sau punct şa.*

Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile

Prezentăm acum o modalitate de a selecta dintre punctele critice pe acelea care sunt puncte de extrem local.

Teoremă (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile). *Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ care are derivate parţiale de ordin doi continue şi $c \in D$ un punct critic al său.*

Atunci:

a) dacă

$$D^2 f(c)(w)^2 > 0,$$

pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f.

b) dacă
$$D^2 f(c)(w)^2 < 0$$
pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$*, atunci* c *este un punct de maxim relativ al lui* f*.*

c) dacă există $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ *astfel încât*
$$D^2 f(c)(w_1)^2 > 0$$
şi
$$D^2 f(c)(w_2)^2 < 0,$$
atunci c *este un punct şa pentru* f*.*

Demonstraţie. a) Deoarece f are derivate parţiale de ordin doi continue, există $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, astfel ca
$$D^2 f(c)(w)^2 \geq m$$
pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$.

Din acelaşi motiv, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$, cu $\|u - c\| < \delta$, avem
$$D^2 f(u)(w)^2 \geq \frac{m}{2},$$
pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$.

Pentru $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$, conform teoremei lui Taylor, pentru $t \in [0, 1]$, există $\overline{c}$, pe segmentul de capete c şi $c + tw$, astfel ca
$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2} D^2 f(\overline{c})(tw)^2.$$

Prin urmare, pentru $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$ şi $t \in [0, \delta)$ avem
$$f(c + tw) - f(c) = \frac{t^2}{2} D^2 f(\overline{c})(w)^2 > \frac{m}{4} t^2 \geq 0,$$
deci c este un punct de minim relativ al lui c.

b) Se justifică similar.

c) Fie $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ astfel încât
$$\|w_1\| = \|w_2\| = 1,$$
$$D^2 f(c)(w_1)^2 > 0$$

şi

$$D^2f(c)(w_2)^2 < 0.$$

Atunci, există t, astfel încât

$$f(c + tw_1) > f(c)$$

şi

$$f(c + tw_2) < f(c),$$

deci c este punct şa al lui f. $\square$

Observaţie. *Rezultatul precedent arată că natura punctului critic c este determinată de forma pătratică $D^2f(c)(w)^2$.*

În particular, este important de stabilit dacă această funcţie ia valori de semne contrare sau dacă valorile ei au acelaşi semn.

Cu notaţia

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(c) \end{vmatrix},$$

unde $j \in \{1, 2, ..., p\}$, avem:

a) dacă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_p > 0$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f.

b) dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^p\Delta_p > 0$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f.

c) dacă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_p \geq 0$ (sau $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, ..., $(-1)^p\Delta_p \geq 0$) şi există $j \in \{1, 2, ..., p\}$, astfel ca $\Delta_j = 0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie (a se vedea în acest sens exerciţiul 4).

d) în celelate cazuri c este un punct şa al lui f.

Detalii privind observaţia de mai sus se pot găsi în *Constantin Meghea, Irina Meghea*, **Tratat de Calcul Diferenţial şi Calcul Integral pentru Învăţământul Politehnic**, Editura Tehnica, Bucureşti, 1997, pagina 451.

Vom demonstra această afirmaţie în cazul $p = 2$.

Aşadar avem de studiat forma pătratică

$$Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Dacă

$$\Delta = AC - B^2 > 0,$$

atunci

$$A \neq 0$$

şi avem

$$Q(x, y) = \frac{1}{A}[(Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2],$$

deci semnul lui Q este dat de semnul lui A.

Pe de altă parte, dacă

$$\Delta = AC - B^2 < 0,$$

atunci:

i) pentru $A \neq 0$, $Q(1, 0) = A$ şi $Q(B, -A) = A(AC - B^2)$;

ii) pentru $A = 0$, $C \neq 0$ sau $A = C = 0$ se arată similar că aplicaţia Q ia atât valori strict pozitive, cât şi strict negative.

Prin urmare avem următorul:

Corolar. *Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care are derivate parţiale de ordin doi continue, $c \in D$ un punct critic al său şi*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(c) - (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c))^2.$$

Atunci:

a) dacă $\Delta > 0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) > 0$, c este un punct de minim relativ al lui f.

b) dacă $\Delta > 0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) < 0$, c este un punct de maxim relativ al lui f.

c) *dacă $\Delta < 0$, c este un punct şa al lui f.*

Observaţie. *Matricea*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p}(c) \end{pmatrix},$$

numită Hessiana funcţiei f în punctul c, este cea care permite selectarea punctelor de extrem dintre punctele critice.

Notă istorică. *Otto Hesse* s-a născut in 1811 la Königsberg, Prusia (azi Kaliningrad, Rusia). Aici urmează gimnaziul şi Universitatea unde studiază matematica şi ştiinţele naturii, avându-i ca profesori pe Jacobi şi Bessel. Sub îndrumarea lui Jacobi obţine titlul de doctor în matematică în 1840. În 1845 este numit profesor la Universitatea din Königsberg, în 1855 la Universitatea din Halle, în 1856 la Universitatea Ruprecht-Karls din Heildelberg, iar în 1868 la Politehnica dinMűnchen. Printre studenţii lui Hesse trebuie amintiţi Gustav Kirchhoff, Rudolph Lipschitz şi Ernst Schröder. A fost membru al Academiei de Ştiinţe din Berlin (din partea căreia a primit premiul Steiner), al Academiei de Ştiinţe din Göttingen, al Academiei Bavareze de Ştiinţe şi al London Mathematical Society. A murit în 1874.

Extreme cu legături. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Până în prezent am discutat situaţia în care punctele de extrem ale unei funcţii cu valori reale se află în interiorul domeniului de definiţie $D \subseteq \mathbb{R}^p$. Nici una dintre consideraţiile anterioare nu se aplică în cazul în care punctele de extrem se află pe frontiera domeniului de definiţie al funcţiei. Dacă frontiera domeniului de definiţie al funcţiei f poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcţii φ, atunci problema se reduce la studiul extremelor funcţiei $f \circ \varphi$. Dacă S este o suprafaţă conţinută în domeniul D de definiţie al funcţiei f cu valori reale, suntem nevoiţi, de multe ori, să determinăm extremele funcţiei $f_{|S}$. Spre pildă, pentru $D = \mathbb{R}^n$ şi $f(x) = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, problema de mai sus revine la a determina punctele de pe S, care sunt cele mai depărtate sau apropiate de origine. Dacă S poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcţii φ, atunci problema, ca mai sus, se reduce la studiul extremelor funcţiei $f \circ \varphi$. De multe ori însă, această abordare nu este cea mai nimerită. Ca atare, dorim să elaborăm o altă procedură pentru rezolvarea acestei probleme. Să presupunem că există o aplicaţie g, astfel ca $S = \{x \in D \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\})$. Dorim să determinăm extremele relative ale funcţiei $f_{|S}$. Dacă f şi g sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a unui punct c din D şi $Dg(c) \neq 0$, atunci o condiţie necesară ca c să fie un extrem relativ al lui $f_{|S}$ este ca $Dg(c)$ să fie un multiplu de $Df(c)$. În limbajul derivatelor parţiale, există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(c)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_p}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_p}(c)$. Practic dorim să determinăm c. λ, numit multiplicator Lagrange, este de asemenea o necunoscută. Cele p ecuaţii anterioare, împreună cu ecuaţia $g(c) = 0$, formează un sistem cu $p+1$ necunoscute, anume c_1, ..., c_p şi λ, unde $c = (c_1, ..., c_p)$. Mai precis avem:

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange. *Fie f şi g de clasă $\mathcal{C}^1$ pe*

$D \subseteq \mathbb{R}^p$, cu valori în $\mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$, aşa încât

$$g(c) = 0.$$

Să presupunem că există V_0 o vecinătate a lui c, astfel ca

$$f(x) \leq f(c),$$

(sau $f(x) \geq f(c)$) pentru orice $x \in V_0$ cu proprietatea suplimentară $g(x) = 0$.

Dacă $Dg(c) \neq 0$, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$Df(c) = \lambda Dg(c).$$

Demonstraţie. Fie $F : D \to \mathbb{R}^2$ dată de

$$F(x) = (f(x), g(x)),$$

pentru orice $x \in D$.

F este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi

$$DF(x)(w) = (Df(x)(w), Dg(x)(w)),$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$.

Mai mult, $x \in S = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ dacă şi numai dacă $F(x) = (f(x), 0)$.

Să presupunem că $g(c) = 0$ şi că există V_0 o vecinătate a lui c, astfel ca $f(x) \leq f(c)$ pentru orice $x \in V_0$ cu proprietatea suplimentară $g(x) = 0$. (*)

Atunci $DF(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ nu este surjectivă, căci altminteri, în conformitate cu teorema de surjectivitate locală, există $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, şi $V^{'} \subseteq V_0$, o vecinătate a lui c, astfel ca pentru orice $(\zeta, 0)$ cu proprietatea $f(c) < \zeta < f(c) + \varepsilon$, există $u \in V^{'}$, astfel ca $F(u) = (\zeta, 0)$, i.e. $f(u) = \zeta$ şi $g(u) = 0$, ceea ce contrazice (*).

Prin urmare, cum $DF(c) \neq 0$, deducem că $DF(c)(\mathbb{R}^p)$ este o dreaptă din $\mathbb{R}^2$ care trece prin origine.

Pe de altă parte, $Dg(c) \neq 0$, deci există $w_0 \in \mathbb{R}^p$, astfel încât

$$Dg(c)(w_0) \neq 0,$$

de unde

$$DF(c)(Dg(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)})) =$$

$$= (Df(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)})), Dg(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)})) = (\lambda, 1),$$

unde

$$\lambda = Df(c)(Dg(c)(w_0)).$$

Atunci $DF(c)(w) = (Df(x)(w), Dg(x)(w))$ şi $(\lambda, 1)$ se găsesc pe o dreaptă ce trece prin origine, deci

$$Df(c)(w) = \lambda Dg(c)(w),$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, i.e.

$$Df(c) = \lambda Dg(c).$$

Observaţie. *Condiţia* $Df(c)(w) = \lambda Dg(c)(w)$*, pentru orice* $w \in \mathbb{R}^p$*, se mai poate scrie sub forma*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)w_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)w_p = \lambda[\frac{\partial g}{\partial x_1}(c)w_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_p}(c)w_p].$$

Alegând $w_i = e_i$*,* $i \in \{1, 2, ..., p\}$*, obţinem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(c),$$

$$...$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_p}(c),$$

care împreună cu ecuaţia $g(c) = 0$*, formează un sistem de* $p+1$ *necunoscute, anume* c_1*, ...,* c_p *şi* λ*, unde* $c = (c_1, ..., c_p)$*.*

Exemplu. *Să se determine punctul din planul* $2x + 3y - z = 5$ *care este cel mai apropiat de origine.*

Vom minimiza funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată de $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$, pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (funcţie care furnizează pătratul distanţei de la origine la punctul (x, y, z)), supusă la restricţia dată de funcţia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde $g(x, y, z) = 2x+3y-z-5$, pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (anume $g(x, y, z) = 0$).

Obţinem sistemul $2x = 2\lambda$, $2y = 3\lambda$, $2z = -\lambda$, $2x + 3y - z - 5 = 0$, cu necunoscutele x, y, z şi λ.

Soluţia este $(\frac{5}{7}, \frac{15}{14}, -\frac{5}{14})$.

Observaţie. *Metoda lui Lagrange prezentată mai sus furnizează o condiţie necesară, iar punctele obţinute pot fi maxime relative, minime relative sau să nu fie extreme relative. În aplicaţii, stabilirea naturii acestor puncte se poate baza pe considerente geometrice sau fizice; în alte cazuri acest studiu poate conduce la analize foarte subtile.*

Observaţie. *Metoda lui Lagrange prezentată mai sus poate fi extinsă la cazurile în care există mai multe "constrîngeri", introducând câte un multiplicator Lagrange suplimentar pentru fiecare constrângere suplimentară.*

Observaţie. *Mai multe amănunte privind această metode se pot afla consultând articolul "Metoda multiplicatorilor lui Lagrange", Gazeta Matematică, Seria pentru Informare Ştiintifică şi Perfecţionare Metodică, Nr.4, 2004, p.319-339.*

Exerciţii

1. (Generalizare a teoremei lui Rolle). Fie $f : \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1\} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, diferenţiabilă în orice punct interior al domeniului de definiţie şi astfel ca $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, cu $\|x\| = 1$.

Să se arate că există un punct interior al domeniului de definiţie, fie el c, astfel ca $Df(c) = 0$.

2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, derivabilă în punctul $x_0 \in D$, astfel încât $f^{'}(x_0) \neq 0$. Să se arate că pentru orice vecinătate V, a lui x_0, există $x \in V$, $x \neq x_0$ astfel încât $f(x) = f(x_0)$.

3. Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct şa.

4. Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^4 + y^4,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct minim relativ şi că $\Delta(0, 0) = 0$.

Să se arate că originea este un punct maxim relativ şi că $\Delta(0, 0) = 0$, pentru $-f$.

Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^4 - y^4,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct şa şi că $\Delta(0, 0) = 0$.

5. Pentru funcţia $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + cxy,$$

pentru orice $(x, y) \in D$, să se determine punctele critice şi să se stabilească natura lor (de minim, de maxim, şa).

6. Fie $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Să se determine o aplicaţie liniară $F(x) = Ax + B$, $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $\sum\limits_{j=1}^{n} [F(x_j) - y_j]^2$ să fie minimă.

F se numeşte "liniarizarea optimă" a celor n puncte date, în sensul celor mai mici pătrate.

7. Să se arate că o funcţie $f : D = \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, unde D este mărginită, care este armonică (i.e. $\sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x) = 0$, pentru orice $x \in D$) nu are puncte de extrem relativ din interiorul lui D.

8. Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea nu este un punct de extrem relativ, dar că f are ca punct de minim pe $(0, 0)$ de-a lungul oricărei drepte $x = \alpha t, y = \beta t$, $t \in \mathbb{R}$ care trece prin $(0, 0)$.

Acest exemplu arată că nu putem spera să rezolvăm problema determinării punctelor de extrem ale unei funcţii de două variabile prin reducerea la cazul 1-*dimensional.*

9. Să se determine punctele de extrem pentru funcţiile:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z,$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

ii) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

10. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nu admite puncte de extrem global.

11. Să se determine extremele globale ale funcţiei $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

REZUMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă c este un punct de extrem local al lui f, iar f este diferenţiabilă în c, atunci $Df(c) = 0$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă $Df(c) = 0$, atunci c se numeşte punct critic al lui f.

Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ care are derivate parţiale de ordin doi continue şi $c \in D$ un punct critic al său. Atunci: a) dacă $D^2f(c)(w)^2 > 0$, pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f; b) dacă $D^2f(c)(w)^2 < 0$, pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f; c) dacă există $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ astfel încât $D^2f(c)(w_1)^2 > 0$ şi $D^2f(c)(w_2)^2 < 0$, atunci c este un punct şa pentru f.

Cu notaţia $\Delta_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(c) \end{vmatrix}$, unde $j \in \{1, 2, ..., p\}$, avem: a) dacă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_p > 0$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f; b) dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^p\Delta_p > 0$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f; c) dacă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_p \geq 0$ (sau $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, ..., $(-1)^p\Delta_p \geq 0$) şi există $j \in \{1, 2, ..., p\}$, astfel ca $\Delta_j = 0$, atunci nu se poate trage nici o concluzie; d) în celelate cazuri c este un punct şa al lui f.

Fie f şi g de clasă $\mathcal{C}^1$ *pe* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, cu valori în $\mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$, aşa încât $g(c) = 0$. Să presupunem că există V_0 o vecinătate a lui c, astfel ca

$f(x) \geq f(c)$**, (sau** $f(x) \leq f(c)$**) pentru orice** $x \in V_0$ **cu proprietatea suplimentară** $g(x) = 0$**. Dacă** $Dg(c) \neq 0$**, atunci există** $\lambda \in \mathbb{R}$**, astfel ca** $Df(c) = \lambda Dg(c)$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRABILITATE

INTEGRALA RIEMANN-STIELTJES

Noţiunea de funcţie integrabilă Riemann-Stiletjes în raport cu altă funcţie
Proprietăţile de liniaritate şi de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann-Stiletjes
Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stieltjes
Clase de perechi de funcţii (f, g) pentru care f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g
Problema permutării limitei cu integrala
Teorema de reprezentare a lui Riesz

Originile integralei pot fi urmărite departe în trecut. Ele sunt legate de probleme geometrice ca definirea şi determinarea lungimii unei curbe, a ariei unei figuri plane sau a unei suprafeţe în spaţiu, a volumului unui corp solid sau de problema determinării centrului de greutate al unei figuri plane sau al unui corp solid. Cercetări de acest fel urcă până în antichitatea greacă (Eudox din şcoala lui Platon, secolul al IV-lea î. C. şi Arhimede, din şcoala din Alexandria, secolul al III-lea î. C.) şi sunt cunoscute acum sub numele de metoda exhaustiei, adoptat în secolul al XVII-lea.

La o noţiune foarte importantă se ajunge de obicei din mai multe direcţii, după cum şi impactul ei se manifestă în mai multe domenii. Aşa s-a întâmplat şi cu integrala. Dacă itinerarul ei geometric începe încă în Antichitate, originea cinematică se cristalizează abia în secolul al XIV-lea, în legătură cu studiul mişcărilor neuniforme.

Newton impune primatul funcţiei primitive şi legătura dintre primitivă şi arie, pe baza unui algoritm deosebit de simplu.

Contrar lui Newton, G.W. Leibniz are ca punct de plecare, în problema ariilor, operaţia de limită a unei sume.

Abia fraţii Bernoulli introduc, pe la 1690, termenul de integrală, pe care-l adoptă şi Leibniz şi care corespunde la ceea ce numim azi primitivă.

Notaţia $\int\limits_a^b f(x)dx$ pe care o folosim azi pentru integrala definită a fost introdusă în 1816 de către Fourier.

Până la Cauchy, problema existenţei integralei sau primitivei nu era distinctă de problema evaluării lor. ...(Cauchy) obţine prima demonstraţie a existenţei primitivei pentru orice funcţie continuă.

În 1845 un nou pas important în clarificarea ideii de integrală este realizat de Bernhard Riemann ... . Riemann este primul care încearcă să definescă integrala pentru o funcţie nesupusă a priori nici unei restricţii.

Solomon Marcus, Şocul matematicii, Editura Albatros, Bucureşti, 1987, paginile 264-265, 267-268 şi 269-270.

If we have waited this long before defining integration, it is because we have not needed a careful definition. For more than a hundred years, it was enough to define integration as the inverse process to differentiation. As we saw in the last section, this is no longer sufficient when we start using Fourier series. We need a broader and clearer definition. Fourier's solution, to define the definite integral in terms of area, raises the question:what do we mean by "area'? As the nineteenth century progressed, it became increasingly evident that the right way to define area was in terms of integration. If we are to avoid circular reasoning, then we must look elsewhere for our definition.

It was Cauchy who first proposed the modern solution to this problem. He defined the integral as the limit of approximating sums. He was first to unlink the definitions of the integral and derivative. We have seen that Archimedes calculated areas by using approximating sums. Leibniz and his successors used these sums to approximate integrals they could not evaluate precisely. But these were approximation techniques, not definitions.

Part of the reason that no one used this definition before Cauchy is that it is ungainly. Following Cauchy, we shall assume that we are working with a continuous function f on a closed and bounded interval $[a, b]$. We choose a positive integer n and an arbitrary partition of $[a, b]$ into n subintervals: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. These subintervals do not have to be of equal length. We form a sum that approximates the value of the definite integral of f from a to b: $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$. ... Cauchy now defines the value of the definite integral to be the limit of all such sums as the lengths of the subintervals approach zero.

It is significant that he does not merely take the limit as n approaches infinity. ... increasing only the number of subintervals is not enough to give us convergence to the desired value.

A more useful definition of integration was given by Bernhard Riemann in

"Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe". ... this was written after the summer of 1852 when Riemann had discussed questions of Fourier series with Dirichlet. Its purpose was nothing less than to find necessary and sufficient conditions for a function to have a representation as a trigonometric series. Riemann never published it, probably because it raises many new questions that he was hoping to answer. It appeared in 1867, after his death. ... Cauchy's definition was adequate for proving that any bounded continuous function is integrable. It was also sufficient for a demonstration that any bounded piecewise continuous function is integrable. Riemann wished to consider even more general functions, functions with infinitely many discontinuities within any finite interval. His definition is very similar to Cauchy's. Like Cauchy, he uses approximating sums: $\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}^{*})(x_j - x_{j-1})$. Unlike Cauchy who evaluated the function f at the left-hand endpoint of each interval, Riemann allows approximating sums in which x_{j-1}^{*} can be any point in the interval $[x_{j-1}, x_j]$. Because of this extra freedom, it appears more difficult to guarantee convergence of these series. In fact, Riemann's definition is equivalent to Cauchy's. Cauchy wanted to be able to prove that any continuous function is integrable. Riemann was interested in seeing how discontinuous a function could be and still remain integrable. ... What Riemann gains in allowing x_{j-1}^{*} to take on any value in $[x_{j-1}, x_j]$ is greater flexibility. In particular, it enables him to establish necessary and sufficient conditions for the existence of the integral.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 237-238 şi 250-251.

Noţiunea de funcţie integrabilă Riemann-Stiletjes în raport cu altă funcţie

Notă istorică. *Bernhard Riemann* (1826-1866) a fost unul dintre matematicienii de frunte ai secolului al XIX-lea. În scurta sa carieră, el a introdus idei de o importanţă fundamentală în analiza complexă, analiza reală, geometria diferenţială, teoria numerelor şi alte domenii ale matematicii. Cercetările sale de geometrie diferenţială au constituit baza matematică pentru teoria generală a relativităţii.

Numele lui Riemann este legat de (probabil) cea mai importantă conjenctură nedemonstrată încă, a matematicii zilelor noastre, şi anume ipoteza lui Riemann, care este de o importanţă fundamentală pentru distribuţia numerelor prime.

Riemann s-a născut în 1826 în ţinutul Hanovrei, mai târziu parte din Germania. Încă de la o vârstă fragedă el îşi manifestă interesul pentru istorie şi matematică, fiind încurajat de către familia sa în acest sens. La vârsta de 14 ani intră la gimnaziul din Hanovra, iar doi ani mai târziu este transferat la gimnaziul din Lüneburg, unde îi este descoperit remarcabilul talent matematic. Schmalfuss, directorul gimnaziului, îi dă lui Riemann o carte de teoria numerelor scrisă de Legendre. Şase zile mai târziu, Riemann îi înapoiază cartea de 859 pagini spunând: "Este o carte minunată! Am terminat-o." Şi o terminase. În 1846, Riemann se înscrie la Universitatea Göttingen. Conform dorinţelor tatălui său, începe facultatea de teologie, dar se transferă curând la facultatea de filosofie pentru a studia stiinţele şi matematica.

Cu toate că Gauss se afla şi el la Universitatea din Göttingen în această perioadă, probabil că nu a avut nici un contact personal cu Riemann. Abilitatea lui Riemann i-a atras însă atenţia altui matematician de la Göttingen, Moritz Stern. După un an, Riemann se transferă la Universitatea din Berlin, unde poate beneficia de îndrumările lui Jacobi, Steiner, Dirichlet şi Eisenstein. Dirichlet a fost cel care l-a influenţat cel mai mult pe Riemann şi care avea să devină colaboratorul său. În 1850, Riemann se întoarce la Göttingen, unde îşi va petrece tot restul carierei.

Dizertaţia lui Riemann, alcătuită sub supravegherea lui Gauss, în 1851, are ca subiect fundamentarea analizei complexe.

Următorul pas în cariera academică a lui Riemann este calificarea ca Privatdozent (lector). Pentru aceasta, el trebuia să prezinte un Habilitationsschrift (eseu) şi un Habilitationsvortrag (prelegere). Ambele s-au dovedit a fi opere matematice însemnate. Pentru Habilitationsschrift, Riemann a ales ca subiect seriile Fourier, prezentând eseul complet în anul 1853. Cu toate că seriile trigonometrice fuseseră îndelung folosite în astronomie, problema găsirii soluţiilor ecuaţiei undelor, care pot fi reprezentate prin astfel de serii, a constituit subiectul unor largi dezbateri în secolul al XVIII-lea. Problema de bază era lipsa unei fundamentări a Analizei Matematice. Fourier făcuse în mod extensiv uz de seriile trigonometrice în rezolvarea ecuaţiei căldurii, dar a făcut foarte puţine pentru a rezolva aspectele fundamentale. Eseul lui Riemann a constituit un considerabil progres în aceasta problemă, în primul rând prin aceea că a dat primul criteriu de integrabilitate a unei funcţii, şi apoi prin obţinerea unei condiţii necesare pentru ca o funcţie integrabilă Riemann să poată fi reprezentată printr-o serie Fourier.

Pentru Habiltationsvortrag-ul său, Riemann a propus trei teme, şi, contrar aşteptărilor sale, Gauss a ales-o pe cea de geometrie. Prelegerea lui

Riemann ”Despre falsele ipoteze aflate la baza geometriei” a fost susţinută pe 10 iunie 1854. Această operă extraordinară introduce (ceea ce acum se numeşte) suprafaţa Riemann n-dimensională şi tensorul său de curbură. Rezultatele sale sunt folosite, şaizeci de ani mai târziu, în teoria generală a relativităţii a lui Einstein. Probabil că singura persoană din audienţă care aprecia adâncimea operei lui Riemann era Gauss, care făcuse muncă de pionierat în geometria diferenţială. Un raport al prelegerii lui Riemann nu a fost publicat decât în anul 1868, după moartea sa.

Cu toate că Privatdozent-ul putea colecta taxe de la studenţi, postul nu era prevăzut cu salariu. Cu ajutorul lui Dirichlet, Riemann obţine un modest post renumerat. El nu devine profesor asistent decât în anul 1857, an în care îşi publică cercetările sale legate de funcţiile abeliene. Funcţiile abeliene fuseseră studiate de către Abel şi Jacobi; ele sunt o generalizare a funcţiilor eliptice. Riemann dezvoltă o teorie geometrică care rezolvă mai multe probleme remarcabile din acest domeniu. Opera sa îl recomandă pe Riemann ca pe un mare matematician, dar nu fără a-i fi controversat acest titlu. El foloseste în mod extensiv, fară demonstraţie, un principiu variaţional, numit principiul lui Dirichlet. Weierstrass avea îndoielile sale în legătură cu acest principiu, care, după moartea lui Riemann, cade în dizgraţie. Această stare de fapt a avut însă consecinţe fructuoase. Mai mulţi matematicieni au găsit cu succes demonstraţii ale rezultatelor lui Riemann fără a folosi principiul lui Dirichlet, iar principiului în sine i-a fost dată o demonstraţie riguroasă în anul 1899 de către Hilbert.

În 1859, Dirichlet, care era succesor la catedra lui Gauss din 1855, moare în urma unei boli grave. Riemann este numit în locul său. În acelaşi an, el este ales membru corespondent al Academiei de Ştiinte din Berlin. Ca nou membru, lui Riemann i se cere să trimită Academiei un raport al activităţii sale recente. Raportul trimis de Riemann, numit ”Despre numărul numerelor prime mai mici decât un numar dat”, este de o importanţă fundamentală în teoria numerelor. Riemann arată că diverse rezultate legate de distribuţia numerelor prime sunt strâns legate de proprietăţile analitice ale funcţiei zeta. Unele dintre rezultatele sale au fost stabilite în mod riguros de către Hadamard şi Vallée-Poussin în 1896, însă celebra sa conjectură a rămas nedemonstrată până în prezent.

Notă istorică. *Thomas Jan Stieltjes* s-a născut în 1856 în Olanda. Tatăl său era un vestit inginer de construcţii civile (printre altele, el este cel care a construit portul din Rotterdam), doctor al Universităţii din Leiden. Stieltjes

şi-a început studiile la Politehnica Delft în 1873. Aici îşi petrece mult timp în bibliotecă citind operele lui Gauss şi Jacobi, fapt care-l determină să neglijeze cursurile şi ca atare să nu poate promova examenele. În 1877 devine asistent la observatorul astronomic de la Leiden. În urma unei corespondenţe cu Hermite, începe să-şi dedice tot mai mult timp cercetării matematice. În 1885 este ales membru al Academiei Regale de Ştiinţe din Amsterdam, iar în 1866 primeşte titlul de doctor în matematici. În acelaşi an este numit profesor la Universitatea din Toulouse. Este foarte cunoscut în special datorită lucrărilor sale privind fracţiile continue. A murit în 1895.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ **mărginite** (această ipoteză se va menţine, fără a mai fi menţionată explicit în toată această secţiune).

O partiţie (sau o diviziune) a lui $[a, b]$ este o familie finită de intervale închise, care au în comun cel mult un punct şi a căror reuniune este $[a, b]$.

De obicei, o partiţie P a lui $[a, b]$ este descrisă prin specificarea unei mulţimi finite de numere reale $(x_0, x_1, ..., x_n)$ astfel ca $a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$, iar intervale sunt $[x_0, x_1]$, ..., $[, x_{n-1}, x_n]$.

Punctele $x_0, x_1, ..., x_n$ se numesc punctele diviziunii.

De multe ori termenul de partiţie desemnează atât familia de intervale, cât şi punctele partiţiei, deci putem scrie

$$P = (x_0, x_1, ..., x_n).$$

Pentru două partiţii P şi Q ale lui $[a, b]$, spunem că Q este o rafinare a lui P dacă orice interval al lui Q este conţinut într-un interval al lui P, adică, echivalent, orice punct al lui P este un punct al lui Q.

Scriem, în acest caz,

$$P \subseteq Q.$$

Definiţie. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. O sumă Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g, corespunzătoare partiţiei $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a lui $[a, b]$, are forma*

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

unde $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observaţie. *În cazul în care $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, obţinem suma $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$ care poartă numele de sumă Riemann şi care poate*

fi interpretată ca suma ariilor dreptunghiurilor cu baza $[x_{k-1}, x_k]$ şi înălţimea $f(\zeta_k)$. Prin urmare, pentru partiţii foarte fine ale lui $[a, b]$ este de aşteptat ca suma Riemann să genereze o aproximare a "ariei de sub graficul lui f". Dacă $g(x)$ reprezintă "masa" intervalului $[a, x]$, atunci $g(x_k) - g(x_{k-1})$ reprezintă "masa" intervalului $[x_{k-1}, x_k]$. Aşadar, considerând g arbitrară, putem considera alte tipuri de "magnitudini" (altele decât lungimea) ale unui interval.

Observaţie. *Să remarcăm că suma $S(P; f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ depinde de alegerea punctelor intermediare ζ_k. Ar fi poate potrivit să introducem o notaţie care să pună în evidenţă acest fapt. Nu vom proceda astfel deoarece dacă considerăm partiţia $Q = (x_0, \zeta_1, x_1, \zeta_2, ..., \zeta_n, x_n)$ şi suma $S(Q; f, g)$, unde punctele intermediare sunt, alternativ, capetele din dreapta şi din stânga ale intervalelor, avem $S(Q; f, g) = S(P; f, g)$, deci putem presupune totdeauna că partiţia considerată are un număr par de intervale, iar punctele intermediare sunt alternativ, capetele din dreapta şi stânga ale intervalelor.*

Definiţie. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, dacă există un număr real I cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, există P_ε o partiţie a lui $[a, b]$ astfel ca pentru orice partiţie P, care este o rafinare a lui P_ε şi orice sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ corespunzătoare lui P, avem*

$$|S(P; f, g) - I| < \varepsilon.$$

În acest caz, I este unic determinat, se numeşte integrala Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g şi vom nota

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t).$$

În cazul special în care $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, spunem că f este integrabilă Riemann.

Observaţie. *Pentru o mai bună înţelegere a definiţiei de mai sus, cât şi pentru legătura ei cu noţiunea clasică de integrabilitate Riemann, este necesară rezlvarea exerciţiilor 1,2 şi 3 din această secţiune.*

Exemple

1. Pentru $g, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, unde

$$g(x) = \{ \begin{array}{ll} 0, & x = a \\ 1, & x \in (a, b] \end{array},$$

f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă şi numai dacă f este continuă în a, caz în care valoarea integralei este $f(a)$.

2. Funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{array},$$

nu este integrabilă Riemann.

Pentru studiul fenomenelor mecanice care sunt modelate de integrala Riemann-Stieltjes se poate consulta **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti* - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, la paginile 23-33.

Următorul rezultat, analog criterului lui Cauchy pentru şiruri, se va folosi în demonstraţia Teoremei de permutare a limitei cu integrala.

Criteriul lui Cauchy. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, există Q_ε, o partiţie a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice partiţii P şi Q care sunt rafinări ale lui Q_ε şi orice sume Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ şi $S(Q; f, g)$ corespunzătoare lui P, respectiv Q, avem*

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon.$$

Proprietăţile de liniaritate şi de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann-Stiletjes

Următorul rezultat exprimă proprietăţile de liniaritate ale integralei Riemann-Stieltjes.

Teoremă. *a) Fie* $f_1, f_2, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 *integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu* g *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Atunci $\alpha f_1 + \beta f_2$ *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g *şi*

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg = \alpha \int_a^b f_1 dg + \beta \int_a^b f_2 dg.$$

b) Fie $f, g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, f *integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g_1 *şi* g_2 *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Atunci f *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* $\alpha g_1 + \beta g_2$ *şi*

$$\int_a^b f d(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int_a^b f dg_1 + \beta \int_a^b f dg_2.$$

Următorul rezultat, care exprimă aditivitatea de domeniu a integralei Riemann-Stieltjes, se va folosi în cadrul demonstraţiei Teoremei de derivare pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 408).

Teoremă. *a) Fie* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in (a,b)$ *astfel ca* $f_{|[a,c]}$ *să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* $g_{|[a,c]}$ *şi* $f_{|[c,b]}$ *să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* $g_{|[c,b]}$.

Atunci f *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g *şi*

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

b) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in (a,b)$ *astfel ca* f *să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g.

Atunci $f_{|[a,c]}$ *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* $g_{|[a,c]}$, $f_{|[c,b]}$ *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* $g_{|[c,b]}$ *şi*

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stiletjes

Teorema care urmează surprinde un fenomen caracteristic integrabilităţii Riemann-Stieltjes, fenomen care nu apare la integrala Riemann.

Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stieltjes. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Atunci* f *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g *dacă şi numai dacă* g *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* f, *caz în care avem*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Demonstraţie. Să presupunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există P_ε o partiţie a lui $[a, b]$ astfel ca pentru orice partiţie Q, care este o rafinare a lui P_ε şi orice sumă Riemann-Stieltjes $S(Q; f, g)$ corespunzătoare lui P, avem

$$\left| S(Q; f, g) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon. \tag{*}$$

Fie acum P o rafinare a lui P_ε şi să considerăm suma Riemann-Stieltjes $S(P; g, f)$ dată de

$$S(P; g, f) = \sum_{k=1}^{n} g(\zeta_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})),$$

unde $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ şi $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Fie $Q = (y_0, y_1, y_2, ..., y_{2n})$ partiţia lui $[a, b]$ descrisă astfel:

$$y_{2k} = x_k$$

şi

$$y_{2k-1} = \zeta_k,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Să observăm că Q este o rafinare a lui P_ε.

Adunând şi scăzând termenii $f(y_{2k})g(y_{2k})$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, obţinem

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1})),$$

unde punctele intermediare η_k sunt din mulţimea $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, adică

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(Q; f, g).$$

Prin urmare, din (*), avem

$$\left| S(P; g, f) - \{f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f dg\} \right| < \varepsilon,$$

pentru orice partiţie P, care este o rafinare a lui P_ε., ceea ce arată că g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f şi

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \ \square$$

Clase de perechi de funcţii (f, g) pentru care f este integrabilă Riemann-Stiletjes în raport cu g

Rezultatul următor ne furnizează o clasă de perechi de funcţii f şi g pentru care f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.

Teorema de integrabilitate a funcţiilor continue. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă şi g este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.*

Demonstraţie. Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că g este crescătoare.

Deoarece f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $x, y \in [a, b]$, cu proprietatea că

$$|x - y| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Fie $P_\varepsilon = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o partiţie a lui $[a, b]$, astfel ca

$$\sup_{k \in \{1,2,...n\}} (x_k - x_{k-1}) < \delta_\varepsilon,$$

iar $Q = (y_0, y_1, ..., y_m)$ o rafinare a sa.

Atunci

$$S(Q; f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1}))$$

şi

$$S(P_\varepsilon; f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1}))$$

unde ζ_k-urile se pot repeta şi nu aparţin neapărat intervalului $[y_{k-1}, y_k]$.

Oricum, punctele ζ_k şi η_k aparţin unui aceluiaşi interval $[x_{h-1}, x_h]$, deci, conform cu alegerea lui P_ε, avem

$$|f(\zeta_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon.$$

Drept urmare avem

$$|S(P_\varepsilon; f, g) - S(Q; f, g)| = \left| \sum_{k=1}^{m} (f(\zeta_k) - f(\eta_k))(g(y_k) - g(y_{k-1})) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |f(\zeta_k) - f(\eta_k)| \, |g(y_k) - g(y_{k-1})| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{m} |g(y_k) - g(y_{k-1})| =$$

$$= \varepsilon(g(b) - g(a)).$$

Atunci, pentru P şi Q rafinări ale lui P_ε, avem

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \leq$$

$$\leq |S(P; f, g) - S(P_\varepsilon; f, g)| + |S(P_\varepsilon; f, g) - S(Q; f, g)| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon(g(b) - g(a)),$$

ceea ce, în conformitate cu criteriul lui Cauchy, implică faptul că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g. $\square$

Având în vedere Teorema de integrare prin părţi, obţinem:

Corolar. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este monotonă şi g este continuă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.*

Problema permutării limitei cu integrala

Studiem în continuare problema permutării limitei cu integrala.

Pentru început avem nevoie de următoarea lemă (care se foloseşte şi în demonstraţia Primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes - vezi pagina 408).

Lemă. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât f este continuă şi g este crescătoare. Atunci avem estimarea*

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leq \int_a^b |f|\, dg \leq \|f\|\, (g(b) - g(a)),$$

unde $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Dacă

$$m \leq f(x) \leq M,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, *atunci*

$$m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f dg \leq M(g(b) - g(a)).$$

Observaţie. *Dacă f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu funcţia monotonă g, atunci $|f|$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, iar inegalităţile de mai sus sunt valabile.*

Să presupunem acum că $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este crescătoare, iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, este un şir de funcţii integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g, care converge simplu către funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Suntem interesaţi în a determina condiţii suficiente pentru ca

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg.$$

Considerând $g(x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, şi

$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x - \frac{2}{n}), & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{array} ,$$

vom vedea că relaţia de mai sus nu este valabilă, prin urmare trebuie impuse condiţii suplimentare.

Un prim rezultat în această direcţie este dat de următoarea teoremă:

Teorema de permutare a limitei cu integrala. *Fie* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie crescătoare şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, *un şir de funcţii integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu* g, *care converge uniform către funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Atunci f *este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu* g *şi*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca

$$\|f_{n_\varepsilon} - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Conform criteriului lui Cauchy, putem considera o partiţie P_ε a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice rafinări P şi Q ale sale, să avem

$$|S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f_{n_\varepsilon}, g)| \leq \varepsilon.$$

Alegând aceleaşi puncte intermediare pentru f_{n_ε} şi f, avem

$$|S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(P; f, g)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_\varepsilon} - f\| (g(x_k) - g(x_{k-1})) < \varepsilon(g(b) - g(a)),$$

unde $P = (x_0, x_1, ..., x_m)$.

Similar

$$|S(Q; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon(g(b) - g(a)).$$

Prin urmare, pentru P şi Q rafinări ale lui P_ε,

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \leq$$
$$\leq |S(P; f, g) - S(P; f_{n_\varepsilon}, g)| + |S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f_{n_\varepsilon}, g)| + |S(Q; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f, g)| \leq$$
$$\leq \varepsilon(1 + 2(g(b) - g(a)),$$

ceea ce arată, în conformitate cu criteriul lui Cauchy, că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.

Pentru a demonstra că

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg,$$

să observăm că, în acord cu lema de mai sus, avem

$$\left| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f dg \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dg \right| \leq \|f_n - f\| \,(g(b) - g(a)),$$

de unde, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

rezultă concluzia. □

Observaţie. *Ipoteza relativă la convergenţa uniformă a şirului* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este restrictivă. Există rezultate de acelaşi tip, în care restricţiile asupra modului de convergenţă sunt relaxate, dar în care se cere ca funcţia limită să fie integrabilă (vezi cele două teoreme de mai jos).*

Teorema convergenţei mărginite. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, *un şir de funcţii integrabile Riemann cu proprietatea că există* $M \in \mathbb{R}$, *astfel încât*

$$\|f_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplu către funcţia integrabilă Riemann* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *atunci*

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Pentru demonstraţia teoremei de mai sus avem nevoie de următoarea lemă care arată că o funcţie cu valori pozitive, a cărei integrală este strict pozitivă, este mai mare decât o anume constantă pe o mulţime "suficient de mare"

Lemă. *Fie* $f : [0,1] \to [0,\infty)$ *o funcţie integrabilă cu proprietatea că*

$$\alpha = \int_0^1 f > 0.$$

Atunci mulţimea

$$E = \{x \mid x \in [0,1] \text{ şi } f(x) \geq \frac{\alpha}{3}\},$$

conţine un număr finit de intervale închise cu suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3\|f\|}$*, unde* $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$,

Demonstraţie. Fie P o partiţie a lui $[0,1]$ astfel ca

$$|S(P,f) - \alpha| < \frac{\alpha}{3},$$

pentru orice sumă Riemann $S(P,f)$.

Atunci

$$\frac{2\alpha}{3} < S(P,f).$$

Vom alege punctele intermediare din suma Riemann $S(P,f)$ astfel ca, de câte ori este posibil, să avem

$$f(\zeta_k) < \frac{\alpha}{3}.$$

Dacă $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$, atunci

$$S(P;f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum{}' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum{}'' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

unde în $\sum{}'$ vom considera termenii pentru care $[x_{k-1}, x_k] \subseteq E$, iar în $\sum{}''$ vom considera termenii pentru care $[x_{k-1}, x_k] \subsetneq E$.

Notând cu L suma lungimilor intervalelor care sunt implicate în $\sum'$, obţinem

$$\frac{2\alpha}{3} < S(P,f) \leq \sum' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum'' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) < \|f\| L + \frac{\alpha}{3},$$

de unde

$$\frac{\alpha}{3\|f\|} < L,$$

adică concluzia. $\square$

Suntem acum în măsură să prezentăm:

Demonstraţia teoremei convergenţei mărginite. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că

$$[a,b] = [0,1],$$

$$f_n \geq 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi că

$$f = 0$$

(ultimele două presupuneri se pot realiza printr-o eventuală înlocuire a lui f_n cu $|f_n - f|$, folosind exerciţiul 7 din această secţiune).

Dorim să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0.$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq 0$.

Atunci există un subşir $(\int_a^b f_{n_k})_k$ al lui $(\int_a^b f_n)_n$ şi $\alpha > 0$ astfel încât

$$\int_a^b f_{n_k} > \alpha,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

În conformitate cu lema de mai sus şi cu ipoteza, deducem că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, mulţimea

$$E_k = \{x \mid x \in [0,1] \text{ şi } f_{n_k}(x) \geq \frac{\alpha}{3}\}$$

conţine un număr finit de intervale cu suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3M}$.

Prin urmare, există $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită, fapt care intră în contradicţie cu ipoteza care ne asigură că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$.

Pentru a încheia demonstraţia urmează să justificăm existenţa punctului $x_0 \in [0,1]$ cu proprietatea că $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită.

Fără pierderea generalităţii, putem presupune că mulţimile E_k reprezintă reuniunea unui număr finit de intervale având suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3M}$.

Este uşor de văzut că

$$\{x \in [0,1] \mid \text{există un număr infinit de } k \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } x \in E_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_k.$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că nu există $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită.

Atunci

$$\{x \in [0,1] \mid \text{există un număr infinit de } k \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } x \in E_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing,$$

deci, cu notaţiile

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

şi

$$G_n = [0,1] - F_n,$$

avem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing,$$

i.e.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = [0,1].$$

Deoarece

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq ...,$$

avem

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq ... \subseteq G_n \subseteq G_{n+1} \subseteq ...,$$

unde G_n reprezintă o reuniune de intervale având suma lungimilor mai mică decât $1 - \frac{\alpha}{3M}$.

Atunci, cu convenţia $G_0 = \varnothing$, obţinem următoarea contradicţie:

$$1 = l([0,1]) = l(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = l(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n - G_{n-1})) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n - G_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l(G_k - G_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (l(G_k) - l(G_{k-1})) = \lim_{n\to\infty} l(G_n) \leq 1 - \frac{\alpha}{3M}.$$

Teorema convergenţei monotone. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, *un şir monoton de funcţii integrabile Riemann, care converge simplu către funcţia integrabilă Riemann* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Atunci

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstraţie. Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq ... \leq f(x),$$

pentru orice $x \in [a,b]$ şi orice $n \in \mathbb{N}$.

Funcţiile

$$g_n = f - f_n \geq 0$$

sunt integrabile Riemann şi avem

$$\|g_n\| \leq \|f_1\| + \|f\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În continuare demonstraţia decurge precum cea din a teoremei de convergenţă dominată.

Observaţie. *Vom reveni asupra problematicii expuse în cadrul teoremelor de mai sus după ce vom discuta despre integrale improprii (vezi paginile 466-). Problema permutării limitei cu integrala se va studia, într-un cadru mult mai larg, în cadrul cursului de Teoria Măsurii.*

Teorema de reprezentare a lui Riesz

Prezentăm acum un rezultat central al analizei matematice, anume Teorema de reprezentare a lui Riesz, în formularea căreia apare noţiunea de integrală Riemann-Stieltjes.

O formă mai generală a acestei teoreme se va studia în cadrul cursului de Teoria Măsurii.

Teorema de reprezentare a lui Riesz se va folosi în cadrul cursului de Analiză Funcţională (vezi, spre exemplu, *Romulus Cristescu*, **Analiză Funcţională**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, teorema 2.2.4, pagina 114).

Fie

$$\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă}\}.$$

Pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$, vom considera

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Definiţie. *O aplicaţie liniară pe $\mathcal{C}([a,b])$ este o funcţie $G : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ astfel ca*

$$G(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha G(f_1) + \beta G(f_2),$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi orice $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a,b])$.

G se numeşte pozitivă dacă $G(f) \geq 0$ pentru orice $f \geq 0$.

G se numeşte mărginită dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$|G(f)| \leq M \|f\|,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Lemă. *Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi $G : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ dată de*

$$G(f) = \int_a^b f dg,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Atunci G este o funcţională liniară pozitivă şi mărginită.

Teorema următoare, datorată matematicianului ungur **Riesz**, într-o variantă mai generală, este o teoremă centrală a analizei funcţionale.

Teorema de reprezentare a lui Riesz. *Fie* $G : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ *o funcţională liniară pozitivă şi mărginită.*

Atunci există o funcţie crescătoare $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$G(f) = \int_a^b f dg,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Demonstraţie. Pentru început vom construi funcţia crescătoare g.

Cum $G : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ este o funcţională liniară mărginită, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$|G(f)| \leq M \|f\|,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Prin urmare, cum G este liniară şi pozitivă, obţinem că

$$0 \leq G(f_1) \leq G(f_2) \leq M \|f_2\|,$$

pentru orice $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ cu proprietatea că

$$0 \leq f_1 \leq f_2.$$

Pentru $t \in (a,b)$ şi $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare, definim $\varphi_{t,n} : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_{t,n}(x) = \{ \begin{array}{cc} 1, & x \in [a,t] \\ 1 - n(x-t), & x \in (t, t+\frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (t+\frac{1}{n}, b] \end{array} .$$

Se observă că

$$0 \leq \varphi_{t,m} \leq \varphi_{t,n} \leq 1,$$

pentru orice $t \in (a,b)$ şi orice $m, n \in \mathbb{N}$ astfel ca $n \leq m$.

Aceasta arată că şirul de numere reale $(G(\varphi_{t,n}))_n$ este descrescător şi mărginit, şi, prin urmare, conform teoremei convergenţei monotone (vezi pagina), el este convergent

Putem astfel defini funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$g(t) = \lim_{n \to \infty} G(\varphi_{t,n}),$$

unde $t \in (a,b)$.

Deoarece
$$0 \leq \varphi_{t,n} \leq \varphi_{s,n} \leq 1,$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $t,s \in (a,b)$ astfel ca $t \leq s$, prin trecere la limită după n tinzând la ∞, obţinem
$$g(t) \leq g(s),$$
pentru orice $t,s \in (a,b)$.

Definind
$$g(a) = 0$$
şi
$$g(b) = G(\mathbf{1}),$$
unde prin $\mathbf{1}$ înţelegem funcţia constant egală cu 1, am definit o funcţie crescătoare g având domeniul $[a,b]$.

Fie acum $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Atunci, conform teoremei continuităţii uniforme, funcţia f este uniform continuă şi prin urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x,y \in [a,b]$, astfel ca $|x-y| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Deoarece, conform teoremei de integrabilitate a funcţiilor continue, f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P_ε cu proprietatea că
$$\left| \int_a^b f dg - S(Q; f, g) \right| < \varepsilon, \tag{1}$$
pentru orice rafinare Q a lui P_ε şi orice sumă Riemann-Stieltjes $S(Q; f, g)$.

Fie $P = (t_0, t_1, ..., t_m)$ o rafinare a lui P_ε şi $n \in \mathbb{N}$ astfel ca
$$\frac{2}{n} < \min\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, ..., t_m - t_{m-1}\} \leq \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, ..., t_m - t_{m-1}\} < \frac{\delta_\varepsilon}{2}.$$

Deoarece, pentru orice $k \in \{0, 1, ..., m\}$, şirul descrescător $(G(\varphi_{t_k,n}))_n$ are limita $g(t_k)$, putem presupune că n a fost ales de aşa manieră încât
$$g(t_k) \leq G(\varphi_{t_k,n}) \leq g(t_k) + \frac{\varepsilon}{2m \|f\|}. \tag{2}$$

Vom considera funcţia continuă $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f^*(x) = f(t_1)\varphi_{t_1,n}(x) + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)(\varphi_{t_k,n}(x) - \varphi_{t_k,n-1}(x)),$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

Un element $x \in [a,b]$ se află în maximum două dintre intervalele familiei $[t_0, t_1 + \frac{1}{n}], ..., [t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n}], ..., [t_{m-1}, t_m]$ a căror reuniune este $[a,b]$.

Dacă x aparţine unui unic interval din familia descrisă mai sus, atunci:

i) $x \in [t_0, t_1)$

sau

ii) există $k \in \{2, ..., m\}$ astfel ca $x \in (t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k]$.

În cazul i) avem $f^*(x) = f(t_1)$, iar în cazul ii), $f^*(x) = f(t_k)$., deci

$$|f(x) - f^*(x)| < \varepsilon.$$

Dacă x se află în două intervale din familia descrisă mai sus, atunci există $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$ astfel ca $x \in [t_k, t_k + \frac{1}{n}]$, deci

$$f^*(x) = f(t_k)\varphi_{t_k,n}(x) + f(t_{k+1})(1 - \varphi_{t_k,n}(x),$$

i.e.

$$f^*(x) = f(t_k)(1 - n(x - t_k)) + f(t_{k+1})n(x - t_k).$$

Deoarece

$$|x - t_k| < \delta_\varepsilon \text{ şi } |x - t_{k+1}| < \delta_\varepsilon,$$

deducem că

$$|f(x) - f(t_k)| < \varepsilon \text{ şi } |f(x) - f(t_{k+1})| < \varepsilon,$$

de unde

$$|f(x) - f^*(x)| \leq |f(x) - f(t_k)|\,(1 - n(x - t_k)) + |f(x) - f(t_{k+1})|\,n(x - t_k) <$$

$$< \varepsilon(1 - n(x - t_k) + n(x - t_k)) = \varepsilon.$$

Aşadar

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon,$$

de unde

$$|G(f) - G(f^*)| \leq M\varepsilon. \tag{3}$$

Având în vedere (2), avem

$$\left|G(\varphi_{t_k,n}) - G(\varphi_{t_{k-1},n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{m\,\|f\|}, \qquad (4)$$

pentru orice $k \in \{2, 3, ..., m\}$.

Dar, folosind (2) şi (4), obţinem

$$\left|G(f^*) - \sum_{k=1}^{m} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| =$$

$$= \left|G(f(t_1)\varphi_{t_1,n} + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)(\varphi_{t_k,n} - \varphi_{t_k,n-1})) - \sum_{k=1}^{m} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| =$$

$$= \left|f(t_1)G(\varphi_{t_1,n}) - f(t_1)(g(t_1) - g(t_0) + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)(G(\varphi_{t_k,n}) - G(\varphi_{t_{k-1},n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1})))\right| \leq$$

$$\leq |f(t_1)| \left|G(\varphi_{t_1,n}) - (g(t_1)\right| +$$

$$+\sum_{k=2}^{m} |f(t_k)| \left|G(\varphi_{t_k,n}) - G(\varphi_{t_{k-1},n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| \leq$$

$$\leq \|f\| \left(\frac{\varepsilon}{2m\,\|f\|} + \sum_{k=2}^{m} \frac{\varepsilon}{m\,\|f\|}\right) < \varepsilon.$$

Ca atare avem

$$\left|\int_a^b f dg - G(f^*)\right| \leq \left|\int_a^b f dg - \sum_{k=1}^{m} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| + \qquad (5)$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{m} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) - G(f^*)\right| < 2\varepsilon,$$

unde am folosit (1), $\sum\limits_{k=1}^{m} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))$ fiind o sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$, unde P este o rafinare a lui P_ε.

Din (3) şi (5), obţinem

$$\left|\int_a^b f dg - G(f)\right| \leq \left|\int_a^b f dg - G(f^*)\right| + |G(f^*) - G(f)| \leq 2\varepsilon + M\varepsilon = (2 + M)\varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, de unde

$$G(f) = \int_a^b f dg.$$

Observaţie. *Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea funcţionalelor liniare, pozitive şi mărginite din $\mathcal{C}([a,b])$ în $\mathbb{R}$ şi funcţiile crescătoare din $[a,b]$ în $\mathbb{R}$, care se anulează în a şi care sunt continue la dreapta în orice punct din (a,b).*

Notă istorică. *Frigyes Riesz*, născut la Györ, Ungaria, în 1880, a studiat matematica la Budapesta (unde obţine doctoratul în1902), Göttingen şi Zürich. După doi ani petrecuţi în învăţământul liceal, obţine un post în învăţământul universitar. Riesz a fost unul dintre fondatorii analizei funcţionale. În 1907-1908 a descoperit vestita teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue. A introdus noţiunea de convergenţă slabă şi a lucrat în teoria operatorilor. În 1911 este numit la Universitatea din Koloszvár (Cluj) care se mută la Szeged în 1920. Aici, în 1922, împreună cu Haar, înfiinţează Institutul Matematic János Bolyai şi revista Acta Scientiarum Mathematicarum în care publică multe articole. În 1911 este numit la Universitatea din Budapesta. Celebra teoremă Riesz-Fischer (1907) este fundamentală în analiza Fourier a spaţiilor Hilbert şi în mecanica cuantică. A contribuit de asemenea la teoria ergodică, teoria seriilor ortonormale şi la topologie. Cartea sa, "Leçon's d'analyse fonctionnelle", scrisă împreună cu studentul său Szökefalvi-Nagy, este una dintre cele mai clare expuneri ale analizei funcţionale scrise vreodată. A fost membru al Academiei Ungare şi al Academiei Franceze de Ştiinţe, iar în 1949 a primit premiul Kossuth. A murit în 1956.

Exerciţii

1. Pentru o partiţie P, $a = x_0 \leq x_1 \leq .... \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, a lui $[a,b]$, definim norma lui P ca fiind

$$\|P\| = \sup_{j\in\{1,2,...,n\}} (x_j - x_{j-1}).$$

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Spunem că f este (*) integrabilă în raport cu g dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice P partiţie a lui $[a, b]$ cu $\|P\| < \delta_\varepsilon$ şi orice sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ avem

$$|S(P; f, g) - I| < \varepsilon.$$

Dacă există, I este unic, se numeşte (*) integrala lui f în raport cu g şi se notează (*)$\int\limits_a^b f dg$.

Să se arate că dacă f este (*) integrabilă în raport cu g, atunci f este integrabilă în raport cu g şi

$$(*)\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f dg.$$

Observaţie. *În multe manuale de Analiză Matematică se adoptă ca definiţie a integrabilităţii Riemann-Stieltjes (*) integrabilitatea. Dezavantajul unei astfel de abordări este pus în evidenţă de exerciţiul de mai jos.*

2. Fie $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Să se arate că o funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este (*) integrabilă în raport cu g dacă şi numai dacă f este continuă în $\frac{1}{2}$, caz în care

$$(*)\int\limits_a^b f dg = f(\frac{1}{2}).$$

Dacă $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, este dată de

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

atunci $h_{|[0,\frac{1}{2}]}$ este (*) integrabilă în raport cu $g_{|[0,\frac{1}{2}]}$, $h_{|[\frac{1}{2},1]}$ este (*) integrabilă în raport cu $g_{|[\frac{1}{2},1]}$, dar h nu este (*) integrabilă în raport cu g.

3. Pentru $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a,b]$, să se arate că f este (*) integrabilă în raport cu g dacă şi numai dacă f este integrabilă în raport cu g.

Exerciţiul de mai sus punctează legătura dintre teoria integralei Riemann descrise mai sus şi cea "clasică" pe care o schiţăm mai jos (amănuntele se găsesc în **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti* - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, la paginile 366-384).

Definiţie. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$*, unde* I *este un interval nedegenerat.*

Vom spune că funcţia f *admite primitive dacă există o funcţie derivabilă* $F : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $F^{'} = f$.

Funcţia F *se numeşte o primitivă a lui* f *şi se notează cu* $\int f$ *sau cu* $\int f(x)dx$.

Definiţie. *Fie* $[a,b]$ *un interval închis şi mărginit din* $\mathbb{R}$.

Se numeşte diviziune a intervalului $[a,b]$ *un sistem de puncte*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

din $[a,b]$*, astfel încât*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1]$,$[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$ *se numeşte norma diviziunii* Δ *şi se notează:* $\|\Delta\|$.

Aşadar

$$\|\Delta\| = \max_{1\leq\ i\ \leq\ n} (x_i - x_{i-1}).$$

Definiţie. *Fie* $[a,b]$ *un interval închis şi mărginit din* $\mathbb{R}$ *şi*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Un sistem de n *puncte* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *cu proprietatea că*

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,$$

pentru orice $i \in \overline{1,n}$, *se numeşte sistem de puncte intermediare asociat diviziunii* Δ.

Definiţie. *Fie* $[a,b]$ *un interval închis şi mărginit din* $\mathbb{R}$, *o funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$ *şi un sistem* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *de* n *puncte intermediare asociat diviziunii* Δ.

Se numeşte suma Riemann asociată funcţiei f, *diviziunii* Δ *şi punctelor intermediare* ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n *numărul real*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Acest număr va fi notat prin

$$\sigma_\Delta(f, \xi).$$

Definiţie. *O funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *se numeşte integrabilă Riemann dacă există un număr real* I_f *cu proprietatea că oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon > 0$, *astfel încât pentru orice diviziune*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

a intervalului $[a,b]$ *cu*

$$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$$

şi orice sistem $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *de* n *puncte intermediare asociat diviziunii* Δ, *are loc inegalitatea*

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \varepsilon.$$

Numărul real I_f *se numeşte integrala sau integrala definită a funcţiei* f *pe intervalul* $[a,b]$ *şi se notează*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teoremă (Formula Leibniz-Newton). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive.*

Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f.

Propoziţie. *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci f este mărginită.*

Teoremă. *Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) funcţia f este integrabilă;

2) există un număr real I_f cu proprietatea că oricare ar fi şirul de diviziuni $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n-1}^n, x_{k_n}^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n$, $i \in \{1, 2, ..., k_n\}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către I_f.

Definiţie. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, fie

$$m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

şi

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x).$$

Sumele

$$S_\Delta = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

şi

$$s_\Delta = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

se numesc sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ.

Mai precis, S_Δ se numeşte suma Darboux superioară, iar s_Δ se numeşte suma Darboux inferioară.

Se observă că

$$s_\Delta \leq S_\Delta.$$

Teoremă (Criteriul de integrabilitate al lui Darboux). *O funcţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem*

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon.$$

Definiţie. *Fie A o mulţime din $\mathbb{R}$. Spunem că mulţimea A este neglijabilă Lebesgue (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervale deschise şi mărginite cu proprietatea că*

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

unde prin $|I_n|$ înţelegem lungimea intervalului I_n.

Remarcă. *Orice mulţime numărabilă este neglijabilă.*

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate). *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă funcţia f este mărginită şi mulţimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).*

4. Să se arate că o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că mulţimea $A_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ este finită, pentru orice $\varepsilon > 0$, este integrabilă şi $\int_a^b f(x)dx = 0$.

5. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită cu proprietatea că, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, există $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este integrabilă.

6. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Să se arate că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă în raport cu g dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0$, există P_ε o partiţie a lui $[a,b]$ astfel ca pentru orice rafinare $P=(x_1,...,x_n)$ a lui P_ε şi orice $\zeta_i,\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ avem

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\zeta_i)-f(\eta_i)|\left\{g(x_i)-g(x_{i-1})\right\}<\varepsilon.$$

7. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă în raport cu g. Să se arate că $|f|$ este integrabilă în raport cu g.

8. Să se dea exemplu de o funcţie f, care nu este integrabilă Riemann, dar pentru care $|f|$ este integrabilă Riemann.

9. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă în raport cu g. Să se arate că f^2 este integrabilă în raport cu g.

10. Să se dea exemplu de o funcţie f care nu este integrabilă Riemann, dar pentru care f^2 este integrabilă Riemann.

11. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi $f,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile în raport cu g. Să se arate că fh este integrabilă în raport cu g.

12. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann, astfel ca $f(x)>0$, pentru orice $x\in[a,b]$.

Să se arate că

$$\int_a^b f>0.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1+x^2)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}dx.$$

14. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx.$$

15. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=n\sin^n x\cos x,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

16. Să se arate că, dacă pentru funcţia continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avem

$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$f \equiv 0.$$

17. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0),$$

unde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

18. Să se arate că Teorema integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stieltjes este validă şi pentru funcţii (*) integrabile Riemann-Stieltjes.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi monotonă.

Să se arate că f este (*) integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f şi că

$$\int_a^b f df = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}.$$

Să se arate că f este (*) integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f^2 şi că

$$\int_a^b f df^2 = \frac{2(f^3(b) - f^3(a))}{3} \text{ şi } \int_a^b f^2 df = \frac{f^3(b) - f^3(a)}{3}.$$

REZUMAT

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. O sumă Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g, corespunzătoare partiţiei $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a lui $[a, b]$, are forma $S(P; f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$, unde $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, dacă există un număr real I cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, există P_ε o partiţie a lui

$[a, b]$ astfel ca pentru orice partiţie P, care este o rafinare a lui P_ε şi orice sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ corespunzătoare lui P, avem $|S(P; f, g) - I| < \varepsilon$. În acest caz, I este unic determinat, se numeşte integrala Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g şi vom nota $I = \int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f(t) dg(t)$. În cazul special în care $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, spunem că f este integrabilă Riemann.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există Q_ε, o partiţie a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice partiţii P şi Q care sunt rafinări ale lui Q_ε şi orice sume Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ şi $S(Q; f, g)$ corespunzătoare lui P, respectiv Q, avem $|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon$.

Fie $f_1, f_2, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $\alpha f_1 + \beta f_2$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g şi $\int\limits_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg = \alpha \int\limits_a^b f_1 dg + \beta \int\limits_a^b f_2 dg.$

Fie $f, g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g_1 şi g_2 şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $\alpha g_1 + \beta g_2$ şi $\int\limits_a^b f d(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int\limits_a^b f dg_1 + \beta \int\limits_a^b f dg_2$.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a, b)$ astfel ca $f_{|[a,c]}$ să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g_{|[a,c]}$ şi $f_{|[c,b]}$ să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g_{|[c,b]}$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g şi $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^c f dg + \int\limits_c^b f dg$.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a, b)$ astfel ca f să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g. Atunci $f_{|[a,c]}$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g_{|[a,c]}$, $f_{|[c,b]}$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g_{|[c,b]}$ şi $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^c f dg + \int\limits_c^b f dg$.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă şi numai dacă g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f, caz în care avem $\int\limits_a^b f dg + \int\limits_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă şi g este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este monotonă şi g este continuă,

atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.

Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, este un şir de funcţii integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g, care converge uniform către funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g şi $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n dg = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n dg$.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, un şir de funcţii integrabile Riemann cu proprietatea că există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât $\|f_n\| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu către funcţia integrabilă Riemann $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, atunci $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, un şir monoton de funcţii integrabile Riemann, care converge simplu către funcţia integrabilă Riemann $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$.

O aplicaţie liniară pe $\mathcal{C}([a, b])$ este o funcţie $G : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ astfel ca $G(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha G(f_1) + \beta G(f_2)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi orice $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a, b])$. G se numeşte pozitivă dacă $G(f) \geq 0$ pentru orice $f \geq 0$. G se numeşte mărginită dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|G(f)| \leq M \|f\|$, pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi $G : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ dată de $G(f) = \int\limits_a^b f dg$, pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Atunci G este o funcţională liniară pozitivă şi mărginită.

Fie $G : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară pozitivă şi mărginită. Atunci există o funcţie crescătoare $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $G(f) = \int\limits_a^b f dg$, pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Fie A o mulţime din $\mathbb{R}$. Spunem că mulţimea A este neglijabilă Lebesgue (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervale deschise şi mărginite cu proprietatea că $A \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$, unde prin $|I_n|$ înţelegem lungimea intervalului I_n.

O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă funcţia f este mărginită şi mulţimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

TEOREMELE CLASICE ALE CALCULULUI INTEGRAL

Teoreme de medie
Teorema fundamentală a calculului integral
Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann
Teorema de integrare prin părţi
Teorema de schimbare de variabilă
Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală

Vom prezenta în cele ce urmează principalele teoreme privind integrala Riemann (-Stieltjes).

Teoreme de medie; Teorema fundamentală a calculului integral; Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann; Teorema de integrare prin părţi

Folosind corolarul de la pagina 235 şi Lema de la pagina 393, se poate demonstra următorul rezultat, care se va folosi în demonstraţia primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (vezi pagina 411), precum şi în demonstraţia Teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 425).

Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*, g crescătoare şi f continuă.*

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b f dg = f(c) \int_a^b dg = f(c)\{g(b) - g(a)\}.$$

Folosind definiţia derivatei şi Teorema de aditivitate de domeniu a integralei Riemann-Stieltjes (vezi pagina 390), se poate demonstra următorul rezultat care, prin corolarul său, reprezintă unul dintre pilonii calculului integral şi care se va folosi în demonstraţia primei teoreme de medie pentru

integrala Riemann (vezi pagina 413), în demonstraţia Teoremei de schimbare de variabilă (vezi pagina 415), precum şi în cadrul demonstraţiei formulei lui Leibniz (vezi pagina 423).

Teoremă de derivare. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g crescătoare şi f continuă.*

Atunci, dacă g este derivabilă în $c \in [a,b]$, funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată de $F(x) = \int\limits_a^x f dg$ este derivabilă în c şi

$$F^{'}(c) = f(c)g^{'}(c).$$

Corolar-Teorema fundamentală a calculului integral. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă.*

Atunci o funcţie, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, satisface relaţia $F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f$, pentru orice $x \in [a,b]$, dacă şi numai dacă $F^{'} = f$.

Observaţie. *Pentru detalii privind rezultatul de mai sus se pot consulta exerciţiile 1-4.*

Teorema de mai jos furnizează condiţii suficiente pentru a reduce calculul unei integrale Riemann-Stieltjes la calculul unei integrale Riemann, fapt foarte important din punct de vedere practic. Ea se va folosi în demonstraţia primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (vezi pagina 413).

Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă g este derivabilă şi cu derivata continuă, iar f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, atunci $fg^{'}$ este integrabilă Riemann şi*

$$\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f g^{'}.$$

Demonstraţie. Deoarece $g^{'}$ este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există o partiţie $P_\varepsilon = (x_0, ..., x_n)$, a lui $[a,b]$ astfel ca pentru orice $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, avem

$$\left| g^{'}(\zeta_k) - g^{'}(\eta_k) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, ...n\}$.

Pentru o rafinare P a lui P_ε, evaluând $S(P; f, g)$ şi $S(P; fg^{'})$, folosind aceleaşi puncte intermediare ζ_k, găsim o sumă ce conţine termeni de tipul

$$f(\zeta_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} - f(\zeta_k)g^{'}(\zeta_k)\{x_k - x_{k-1}\}.$$

Folosind teorema lui Lagrange, termenul de mai sus se mai scrie

$$f(\zeta_k)\{g^{'}(\nu_k) - g^{'}(\zeta_k)\}\{x_k - x_{k-1}\},$$

unde $\nu_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deci

$$\left| f(\zeta_k)\{g^{'}(\nu_k) - g^{'}(\zeta_k)\}\{x_k - x_{k-1}\} \right| \leq \varepsilon \left\| f \right\| (x_k - x_{k-1}).$$

Prin urmare

$$\left| S(P; f, g) - S(P; fg^{'}) \right| < \varepsilon \left\| f \right\| (b - a),$$

de unde concluzia. $\square$

Folosind Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 413), Teorema de derivare (vezi pagina 412), precum şi Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 412), se poate demonstra următorul rezultat.

Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue astfel încât $g \geq 0$.*

Atunci există $c \in [a, b]$ cu proprietatea că

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Folosind Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 390) şi Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 412), se poate demonstra următorul rezultat care constituie o modalitate eficientă pentru calculul integralelor.

Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivata continuă.*

Atunci

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Folosind Teorema de integrabilitate a funcţiilor continue (vezi pagina 392), Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 411), Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 390) şi Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 412), se poate demonstra următorul rezultat care se va folosi în demonstraţia Criteriului lui Dirichlet (vezi pagina 454).

A doua teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes.

a) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare şi g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b f dg = f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg.$$

b) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare şi g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g.$$

c) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare, $f \geq 0$ şi g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(b)\int_c^b g.$$

Dacă f este descrescătoare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g.$$

Teorema de schimbare de variabilă

Următorul rezultat, care constituie o modalitate eficientă pentru calculul integralelor, se va utiliza pentru justificarea corolarului teoremei lui Taylor cu restul sub formă integrală.

Teorema de schimbare de variabilă. *Fie $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă şi astfel încât $a = \varphi(\alpha) < b = \varphi(\beta)$. Fie f o funcţie al cărei domeniu de definiţie include imaginea funcţiei φ şi care este continuă pe imaginea lui φ.*

Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt.$$

Demonstraţie. Teorema de integrabilitate a funcţiilor continue (vezi pagina 392) ne asigură existenţa integralelor din egalitatea de mai sus.

Fie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx,$$

pentru orice $u \in [a, b]$ şi

$$H = F \circ \varphi.$$

Atunci, folosind Teorema fundamentală a calculului integral (vezi pagina 412), avem

$$H^{'}(t) = F^{'}(\varphi(t))\varphi^{'}(t) = f(\varphi(t))\varphi^{'}(t),$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, de unde

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală

Prezentăm mai jos o formă utilă a teoremei lui Taylor ce se va utiliza în cadrul demonstraţiei Teoremei lui Bernstein.

Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *astfel ca* $f, f^{'}, ..., f^{(n)}$ *să fie continue.*

Atunci

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Demonstraţie. Avem

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\{(b-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \mid_{t=a}^{t=b} + (n-1)\int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt\} =$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt.$$

Se continuă acest procedeu de integrare prin părţi, iar în final se obţine concluzia. □

Corolar. Formula de mai sus se poate scrie, utilizând teorema de schimbare de variabilă, sub forma

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}[a+(b-a)s]ds.$$

Exerciţii

1. Să se dea exemplu de o funcţie f integrabilă Riemann pe $[a, b]$ astfel încât aplicaţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = \int_a^x f,$$

pentru orice $x \in [a,b]$, să nu fie derivabilă.

2. Să se arate că, dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann şi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, astfel ca $F' = f$, atunci $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.

3. Fie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că F este derivabilă, dar că F' nu este integrabilă.

4. Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}.$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann, dar că nu există nici o funcţie a cărei derivată să fie f.

5. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă, iar $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

Să se arate că

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f este derivabilă. Este f' continuă?

7. Să se determine funcţiile $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, derivabile, nenule, care au proprietatea că

$$(n+1)\int_0^x f(t)dt = xf(x),$$

pentru orice $x \in [0,\infty)$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă $\int_0^a \sin^{2n+1}(\pi(t+x))dt$ nu depinde de x, atunci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = 2k$.

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că există $c \in [0,1]$, astfel ca

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}f(c).$$

9. Să se arate că există un unic $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, astfel ca

$$\int_0^c e^{x^2}dx = (1-c)e^{c^2}.$$

10. Să se arate că

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt = \ln 3.$$

11. Să se determine $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ax}}{1+\cos x}dx.$$

12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care verifică relaţia

$$f^3(x) + f(x) \geq x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că

$$\int_0^2 f(x)dx \geq \frac{5}{4}.$$

13. Fie $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ şi $f : (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi derivabilă în a, cu $f'(a) \neq 0$. Pentru orice $\varepsilon \in (0,\delta)$, conform teoremei de medie, există punctele $c_{s,\varepsilon} \in [a-\delta, a]$ şi $c_{d,\varepsilon} \in [a, a+\delta]$ astfel încât

$$\int_{a-\varepsilon}^{a} f(x)dx = \varepsilon f(c_{s,\varepsilon})$$

şi

$$\int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon f(c_{d,\varepsilon}).$$

Să se arate că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c_{d,\varepsilon} - c_{s,\varepsilon}}{\varepsilon} = 1.$$

14. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă, unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, există $c \in (a, b)$, astfel încât

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = f(c)(x_2 - x_1).$$

Să se arate că f este continuă pe (a, b).

Rămâne valabil rezultatul valabil dacă f este integrabilă, dar nu este monotonă?

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform, pe $[a, b]$, către funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)dt,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

16. Pentru fiecare dintre următoarele situaţii, să se arate că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g şi să se calculeze $\int\limits_a^b f dg$:

i) $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = sign(x)$;

ii) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = \max\{1, x^2\}$, $g(x) = x^2$;

ii) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x$, $g(x) = [e^x]$.

REZUMAT

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g crescătoare, iar f continuă. Atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b f dg = f(c) \int\limits_a^b dg = f(c)\{g(b) - g(a)\}$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g crescătoare, iar f continuă. Atunci, dacă g este derivabilă în $c \in [a,b]$, funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată de $F(x) = \int\limits_a^x f dg$ este derivabilă în c şi $F^{'}(c) = f(c) g^{'}(c)$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci o funcţie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface relaţia $F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f$, pentru orice $x \in [a,b]$, dacă şi numai dacă $F^{'} = f$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă g este derivabilă şi cu derivata continuă, iar f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, atunci $fg^{'}$ este integrabilă Riemann şi $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f g^{'}$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, două funcţii continue, iar $g \geq 0$. Atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b fg = f(c) \int\limits_a^b g$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivata continuă. Atunci $\int\limits_a^b f g^{'} = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f^{'} g$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare, iar g continuă. Atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b f dg = f(a) \int\limits_a^c dg + f(b) \int\limits_c^b dg$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare, iar g continuă. Atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b fg = f(a) \int\limits_a^c g + f(b) \int\limits_c^b g$.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f crescătoare, $f \geq 0$ iar g continuă. Atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b fg = f(b) \int\limits_c^b g$. Dacă f este descrescătoare, atunci există $c \in [a,b]$, astfel ca $\int\limits_a^b fg = f(a) \int\limits_a^c g$.

Fie $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă şi astfel încât $a = \varphi(\alpha) < b = \varphi(\beta)$. Fie f o funcţie al cărei domeniu de definiţie include imaginea funcţiei φ şi care este continuă pe imaginea lui φ.

Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt$**.**

Fie $a, b \in \mathbb{R}$**,** $a < b$**,** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**, astfel ca** $f, f^{'}, ..., f^{(n)}$ **să fie continue. Atunci** $f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

INTEGRALE CU PARAMETRU

Continuitatea în raport cu parametrul
Derivabilitatea în raport cu parametrul
Formula lui Leibniz
Teorema de inversare a ordinii de integrare

Studiul integralelor cu parametru este impus de reprezentarea integrală a funcţiilor reale de o variabilă reală care apare în descrierea matematică a multor fenomene din: economie, fizică, tehnică etc.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci, pentru orice $t \in [c, d]$ fixat, aplicaţia dată de $x \to f(x, t)$, pentru orice $x \in [a, b]$, este integrabilă Riemann.

Definim, în aceste condiţii, pentru orice $t \in [c, d]$,

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)dx.$$

Vom studia în cele ce urmează proprietăţile funcţiei F.

Continuitatea în raport cu parametrul

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei de la pagina 465.

Teoremă. *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă.*

Atunci funcţia, dată de

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)dx,$$

pentru orice $t \in [c, d]$, *este continuă.*

Demonstraţie. Deoarece f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $t, t_0 \in [c,d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

Atunci, pentru $t, t_0 \in [c,d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem

$$|F(t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b \{f(x,t) - f(x,t_0)\} dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)| \, dx < \varepsilon(b-a),$$

deci F este continuă în t_0, arbitrar ales în $[a,b]$. $\square$

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei Formulei lui Leibniz (vezi pagina 423), precum şi în cadrul demonstraţiei teoremei de la pagina 466.

Teoremă. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care există $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ şi este continuă pe D.*

Atunci funcţia, dată de

$$F(t) = \int_a^b f(x,t) dx,$$

pentru orice $t \in [c,d]$, este derivabilă şi

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx.$$

Demonstraţie. Deoarece $\frac{\partial f}{\partial t}$ este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $t, t_0 \in [c,d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Atunci, pentru t şi t_0 ca mai sus, în conformitate cu Teorema lui Lagrange, există t_1,, între t şi t_0, astfel ca

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| = |t - t_0| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_1).$$

Prin urmare, pentru $0 < |t - t_0| < \delta_\varepsilon$, obţinem

$$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Atunci

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx \right| \leq \int\limits_a^b \left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| dx < \varepsilon(b-a),$$

ceea ce arată că F este derivabilă în t_0 şi că

$$F^{'}(t_0) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Formula lui Leibniz

O generalizare a rezultatului precedent este următoarea:

Formula lui Leibniz. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, pentru care există $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ şi este continuă pe D.*

Fie $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ două funcţii derivabile.

Atunci funcţia, dată de

$$\varphi(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [c,d]$, este derivabilă şi

$$\varphi^{'}(t) = f(\beta(t),t)\beta^{'}(t) - f(\alpha(t),t)\alpha^{'}(t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Demonstraţie. Să considerăm $H : [a,b] \times [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, dată de

$$H(u,v,t) = \int\limits_{v}^{u} f(x,t)dx.$$

Atunci

$$\varphi(t) = H(\beta(t),\alpha(t),t),$$

pentru orice $t \in [c,d]$.

Drept urmare avem

$$\varphi^{'}(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(\beta(t),\alpha(t),t)\beta^{'}(t) + \frac{\partial H}{\partial v}(\beta(t),\alpha(t),t)\alpha^{'}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}(\beta(t),\alpha(t),t).$$

Dar, conform Teoremei fundamentale a calculului integral (vezi pagina 412), avem

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v,t) = f(u,t)$$

şi

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v,t) = -f(v,t),$$

iar conform Teoremei de derivare în raport cu parametrul (vezi pagina 422), avem

$$\frac{\partial H}{\partial t}(u,v,t) = \int\limits_{v}^{u} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,$$

de unde concluzia. □

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei care permite reducerea calculului unei integrale duble la o succesiune de integrale Riemann (vezi pagina 439), precum şi în cadrul demonstraţiei teoremei de la pagina 465.

Teorema de inversare a ordinii de integrare. *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă.*

Atunci

$$\int_c^d \{\int_a^b f(x,t)dx\}dt = \int_a^b \{\int_c^d f(x,t)dt\}dx.$$

Demonstraţie. Continuitatea funcţiei f asigură existenţa integralele iterate de mai sus.

Rămâne să stabilim egalitatea de mai sus.

Deoarece f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$,astfel încât pentru orice $t, t' \in [c,d]$ cu $\left|t - t'\right| < \delta_\varepsilon$ şi $x, x' \in [a,b]$ cu $\left|x - x'\right| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left|f(x,t) - f(x',t')\right| < \varepsilon.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon$$

şi

$$\frac{d-c}{n} < \delta_\varepsilon.$$

Vom împărţi pe D în n^2 dreptunghiuri egale generate de împărţirea lui $[a,b]$ şi $[c,d]$ în n intervale egale.

Pentru orice $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ să considerăm

$$x_j = a + \frac{(b-a)j}{n}$$

şi

$$t_j = c + \frac{(d-c)j}{n}.$$

Atunci

$$\int_c^d \{\int_a^b f(x,t)dx\}dt = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x,t)dx\}dt.$$

Drept urmare, conform Primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 411), există $x_j^{'} \in [x_{j-1}, x_j]$ şi $t_k^{'} \in [t_{k-1}, t_k]$ astfel ca

$$\int_c^d \{\int_a^b f(x,t)dx\}dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_j^{'}, t_k^{'})(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Similar există $x_j^{''} \in [x_{j-1}, x_j]$ şi $t_k^{''} \in [t_{k-1}, t_k]$ astfel ca

$$\int_a^b \{\int_c^d f(x,t)dt\}dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_j^{''}, t_k^{''})(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Prin urmare

$$\left| \int_c^d \{\int_a^b f(x,t)dx\}dt - \int_a^b \{\int_c^d f(x,t)dt\}dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \{f(x_j^{'}, t_k^{'}) - f(x_j^{''}, t_k^{''})\}(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon(b-a)(d-c).$$

Cum ε a fost ales arbitrar, deducem concluzia. $\square$

Exerciţii

1. Să se calculeze

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)dx.$$

2. Pentru

$$F(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

$\alpha \neq 0$, să se calculeze $F^{'}(\alpha)$.

3. Să se arate că

$$\int_0^{\pi} \ln(\frac{b-\cos x}{a-\cos x})dx = \pi \ln(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}),$$

unde $a, b > 1$.

REZUMAT

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**,** $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ **şi** $f : D \to \mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci funcţia, dată de** $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$**, pentru orice** $t \in [c,d]$**, este continuă.**

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**,** $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ **şi** $f : D \to \mathbb{R}$ **o funcţie continuă pentru care există** $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ **şi este continuă pe** D**. Atunci funcţia, dată de** $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$**, pentru orice** $t \in [c,d]$**, este derivabilă şi** $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$**.**

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**,** $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ **şi** $f : D \to \mathbb{R}$ **o funcţie continuă, pentru care există** $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ **şi este continuă pe** D**. Fie** $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ **două funcţii derivabile. Atunci funcţia, dată de** $\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$**, pentru orice** $t \in [c,d]$**, este derivabilă şi**

$$\varphi'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ **şi** $f : D \to \mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci** $\int_c^d \{\int_a^b f(x,t)dx\}dt = \int_a^b \{\int_c^d f(x,t)dt\}dx$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

INTEGRALA MULTIPLĂ

Măsura unui interval închis din $\mathbb{R}^p$
Submulţimi ale lui $\mathbb{R}^p$ de măsură nulă
Integrala Riemann a unei funcţii de mai multe variabile
Integrala multiplă ca integrală iterată
Schimbarea de variabile pentru integrala Riemann a funcţiilor de mai multe variabile

Măsura unui interval închis din $\mathbb{R}^p$

Definiţie. *Un interval închis din* $\mathbb{R}^p$ *este o submulţime* J *a lui* $\mathbb{R}^p$ *de forma* $[a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p]$, *unde* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, *pentru orice* $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Observaţie. J *se numeşte cub în cazul în care* $b_1 - a_1 = ... = b_p - a_p$.

Definiţie. *Numărul* $\mu(J) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_p - a_p)$ *se numeşte măsura lui* $J = [a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p]$.

Observaţie. *Pentru* $p = 1$ *terminologia clasică este cea de lungime, pentru* $p = 2$ *cea de arie, iar pentru* $p = 3$ *cea de volum.*

Observaţie. *Dacă există* $k \in \{1, 2, ..., p\}$ *astfel ca* $a_k = b_k$, *atunci* $\mu(J) = 0$; *acest fapt nu implică că* J *este vid, ci faptul că* J *nu are "grosime" în cea de a* k*-a dimensiune.*

Submulţimi ale lui $\mathbb{R}^p$ de măsură nulă

Definiţie 1. *O submulţime* Z *a lui* $\mathbb{R}^p$ *se numeşte de măsură Jordan nulă dacă pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există o familie finită* $\{J_1, ..., J_n\}$ *de intervale închise astfel încât* Z *este conţinută în reuniunea elementelor acestei familii şi* $\mu(J_1) + ... + \mu(J_n) < \varepsilon$.

Notă istorică. *Camille Jordan* (1800-1888) a studiat la liceul din Lion. Începând cu 1855 studiază matematica la École Polytechnique, unde, din 1876, este şi profesor de Analiză Matematică. Din 1883 este profesor şi

la Collège de France. Tratatul său în trei volume, apărut între 1882 şi 1887, intitulat Cours d'analyse de l'École Polytechnique, este un model de prezentare riguroasă şi pedagogică a chestiunilor de Analiză Matematică. În 1885 devine, pentru o perioadă de 35 de ani, editorul uneia dintre cele mai influente publicaţii matematice, anume Journal de Mathématiques Pure et Appliquées (cunoscut şi sub numele de Journal de Liouville). Trei dintre cei şase fii ai săi au murit în primul război mondial. A fost membru al Académie des Sciences, ofiţer al Légion d'honneur şi Preşedinte de onoare al Congresului Internaţional al Matematicienilor de la Strasbourg, care a avut loc în 1920.

Exemple

1. *Orice submulţime finită a lui* $\mathbb{R}^p$ *este de măsură Jordan nulă.*

2. *Orice submulţime a lui* $\mathbb{R}^p$ *ale cărei elemente formează un şir convergent este de măsură Jordan nulă.*

3. *Mulţimea* $S = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *este de măsură Jordan nulă.*

4. *Mulţimea* $S = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *este de măsură Jordan nulă.*

5. *Mulţimea* $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *este de măsură Jordan nulă.*

6. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *o funcţie continuă. Atunci mulţimea* $S = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *este de măsură Jordan nulă.*

7. *Mulţimea* $S = \{(x,y) \mid x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *nu este de măsură Jordan nulă, deşi este numărabilă.*

8. *O reuniune finită de mulţimi de măsură Jordan nulă este o mulţime de măsură Jordan nulă.*

9. *În contrast cu 6, există* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, *două funcţii continue, astfel încât* $S = \{(f(t), g(t)) \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *nu este de măsură Jordan nulă (ea conţinând* $[0,1] \times [0,1]$*); S se numeşte curbă Peano.* *A se vedea exerciţiul 8 de la pagina 477.*

Integrala Riemann a unei funcţii de mai multe variabile

În cele ce urmează vom presupune că $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie mărginită.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}^q$ prelungită cu valoarea 0 în afara lui D, se va nota tot cu f.

Deoarece $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă, există I_f un interval închis din $\mathbb{R}^p$, care conţine pe D.

Să presupunem că

$$I_f = [a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p],$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., p\}$, fie P_k o partiţie a lui $[a_k, b_k]$.

Aceste partiţii induc o partiţie P a lui I_f într-un număr finit de intervale închise din $\mathbb{R}^p$.

Dacă P şi Q sunt partiţii ale lui I_f spunem că P este o rafinare a lui Q dacă orice interval al lui P este conţinut într-un interval al lui Q.

Definiţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$.*

O sumă Riemann a lui f corespunzătoare partiţiei $P = (J_1, J_2, ..., J_n)$ a lui I_f, are forma

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mu(J_k),$$

unde $x_k \in J_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Spunem că funcţia f este integrabilă Riemann dacă există un element $L \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există P_ε o partiţie a lui I_f astfel ca, pentru orice partiţie P, care este o rafinare a lui P_ε şi orice sumă Riemann $S(P; f)$ corespunzătoare lui P, avem

$$\|S(P; f) - L\| < \varepsilon.$$

În acest caz, L este unic determinat, nu depinde de I_f, se numeşte integrala Riemann a lui f pe D şi se notează $\int\limits_D f$ sau, pentru $p = 2$, $\int\int\limits_D f$ sau $\int\int\limits_D f(x, y)dxdy$, sau, pentru $p = 3$, $\int\int\limits_D\int f$ sau $\int\int\limits_D\int f(x, y, z)dxdydz$.

Următorul rezultat se va folosi în cadrul demonstraţiei primei teoreme de integrare pentru integrala Riemann multiplă.

Criteriul lui Cauchy. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă. Atunci f este integrabilă Riemann, pe D, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există Q_ε, o partiţie a lui I_f, astfel ca pentru orice partiţii P şi Q, care sunt rafinări ale lui Q_ε şi orice sume Riemann $S(P; f)$ şi $S(Q; f)$, corespunzătoare lui P, respectiv Q, avem*

$$\|S(P; f) - S(Q; f)\| < \varepsilon.$$

Rezultatul următor exprimă proprietatea de liniaritate a integralei Riemann multiple. El va fi folosit în cadrul demonstraţiei lemei 2 (vezi pagina 433), lemei 4 (vezi pagina 436), precum şi a teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 437).

Teoremă. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime compactă, $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ două funcţii integrabile Riemann pe D şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann pe D şi

$$\int\limits_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_D f + \beta \int\limits_D g.$$

Demonstraţie. Totul decurge din faptul că

$$S(P; \alpha f + \beta g) = \alpha S(P; f) + \beta S(P; g),$$

unde P este o partiţie arbitrară a lui I_f, iar punctele intermediare folosite sunt aceleaşi pentru toate cele trei sume Riemann. □

Lema următoare se va folosi în cadrul observaţiei de la pagina 435-436.

Lema 1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, o funcţie mărginită, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă de măsură Jordan nulă. Atunci f este integrabilă Riemann pe D şi*

$$\int\limits_D f = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece D este de măsură Jordan nulă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P_ε a lui I_f cu proprietatea că acele intervale ale sale care conţin puncte din D au suma măsurilor inferioară lui ε.

Dacă $M \in \mathbb{R}$ are proprietatea că

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$, atunci

$$\|S(P; f)\| \leq M\varepsilon,$$

pentru orice partiţie P care constituie o rafinare a lui P_ε, ceea ce arată că f este integrabilă Riemann pe D şi

$$\int\limits_D f = 0. \ \square$$

Observaţie. Raţionamentul de mai sus ne arată de asemenea că *dacă* $f : D \to \mathbb{R}^q$ *este o funcţie mărginită cu proprietatea că* $\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$ *este de măsură Jordan nulă, atunci* f *este integrabilă Riemann pe* D *şi*

$$\int_D f = 0.$$

Următoarea lemă se va folosi în cadrul Teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 437).

Lema 2. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$ *o mulţime compactă,* $E \subseteq D$*,* E *având măsură Jordan nulă şi* $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ *două funcţii mărginite, astfel încât* f *este integrabilă Riemann pe* D *şi*

$$f(x) = g(x),$$

pentru orice $x \in D - E$.

Atunci g *este integrabilă Riemann pe* D *şi*

$$\int_D f = \int_D g.$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, funcţia $h = g - f$ este nulă pe $D - E$, deci, cum E este de măsură Jordan nulă, conform observaţiei aferente lemei 1, h este integrabilă pe D şi

$$\int_D h = 0.$$

Conform teoremei de la pagina , funcţia $h + f$, i.e. funcţia g este integrabilă şi

$$\int_D g = \int_D h + f = \int_D h + \int_D f = \int_D f. \ \square$$

Integrabilitatea Riemann a funcţiilor de mai multe variabile

Este de aşteptat că dacă f este continuă pe un interval închis J din $\mathbb{R}^p$, atunci f este integrabilă pe J. Vom demonstra un rezultat mai puternic, care permite funcţiei să aibă discontinuităţi pe o mulţime de măsură nulă.

Prima teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă. *Fie $f : J \to \mathbb{R}^q$, o funcţie mărginită, unde J este un interval închis din $\mathbb{R}^p$. Dacă f este continuă exceptând punctele unei mulţimi E de măsură Jordan nulă, atunci f este integrabilă pe J.*

Demonstraţie. Fie $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in J$ şi fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Atunci există o partiţie P_ε a lui J astfel ca intervalele sale care conţin puncte din E au suma măsurilor mai mică decât ε.

Reuniunea C a intervalelor lui P_ε, care nu conţin puncte din E, este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^p$ pe care f este continuă, deci uniform continuă.

Prin urmare, înlocuind eventual pe P_ε cu o rafinare a sa, putem presupune că dacă J_k este un interval al lui P_ε, care este conţinut în C şi dacă x şi y sunt puncte arbitrare ale lui J_k, atunci

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Fie acum P şi Q rafinări ale lui P_ε.

$S^{'}(P; f)$ şi $S^{'}(Q; f)$ fiind porţiunile din sumele Riemann corespunzătoare intervalelor din C, avem

$$\left\| S^{'}(P; f) - S^{'}(Q; f) \right\| < \varepsilon\mu(J).$$

$S^{''}(P; f)$ şi $S^{''}(Q; f)$ fiind celelalte porţiuni din sumele Riemann, avem

$$\left\| S^{''}(P; f) - S^{''}(Q; f) \right\| \leq \left\| S^{''}(P; f) \right\| + \left\| S^{''}(Q; f) \right\| < 2M\varepsilon.$$

Prin urmare

$$\|S(P; f) - S(Q; f)\| < (2M + \mu(J))\varepsilon,$$

deci f este integrabilă. $\square$

Teorema de mai sus stabileşte integrabilitatea unei funcţii pe un interval J, în condiţiile de continuitate menţionate mai sus. Este de dorit să obţinem un rezultat care să stabilească integrabilitatea pe o mulţime mai generală decât un interval.

A doua teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă, unde D este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^p$ care are frontiera de măsură Jordan nulă. Atunci f este integrabilă pe D.*

Demonstraţie. Fie I_f un interval închis care conţine pe D şi să extindem pe f, pe $\mathbb{R}^p$, prin $f(x) = 0$, pentru $x \notin D$.

Atunci această extindere este continuă în orice punct al lui I_f, exceptând eventual $Fr(D)$, care este de măsură Jordan nulă, de unde, conform primei teoreme de integrabilitate pentru integrala Riemann multiplă, f este integrabilă. $\square$

Definiţie 2. *O submulţime mărginită D, a lui $\mathbb{R}^p$, care are frontiera de măsură Jordan nulă, se numeşte măsurabilă şi definim măsura lui D, notată cu $A(D)$, ca fiind*

$$\int\limits_{D \cup Fr(D)} 1 dx.$$

Următoarea lemă va fi folosită în demonstraţia lemei 4 (vezi pagina 436), precum şi a teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 437).

Lema 3. *Dacă D este o submulţime măsurabilă a lui $\mathbb{R}^p$, atunci mulţimea compactă $D \cup Fr(D)$ este măsurabilă şi*

$$A(D) = A(D \cup Fr(D)).$$

Demonstraţie. Deoarece, conform cu exerciţiul 12 de la pagina 116, avem

$$Fr(D \cup Fr(D)) \subseteq Fr(D),$$

deducem că $Fr(D \cup Fr(D))$ este de măsură Jordan nulă, deci $D \cup Fr(D)$ este măsurabilă şi

$$A(D \cup Fr(D)) = \int\limits_{D \cup Fr(D) \cup Fr(D \cup Fr(D))} 1 dx = \int\limits_{D \cup Fr(D)} 1 dx = A(D). \ \square$$

Observaţie. *Fie D o submulţime a lui $\mathbb{R}^p$, care este de măsură Jordan nulă (vezi Definiţia 1). Prin urmare, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există o*

familie finită $\{J_1, ..., J_n\}$ *de intervale închise astfel încât* D *este conţinută în reuniunea elementelor acestei familii şi* $\mu(J_1) + ... + \mu(J_n) < \varepsilon$. *Atunci* $Fr(D) \subseteq J_1 \cup ... \cup J_n$, *deci* D *şi* $Fr(D) \cup D$ *sunt de măsură Jordan nulă şi, prin urmare,* D *este măsurabilă în sensul Definiţiei 2, şi, conform lemei 1 (vezi pagina 432), avem*

$$A(D) = \int\limits_{D \cup Fr(D)} 1dx = 0.$$

Reciproc, să presupunem că D *este măsurabilă în sensul Definiţiei 2, şi că* $A(D) = 0$. *Atunci, pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există o partiţie* P_ε *a unui interval care conţine* D, *astfel încât pentru orice sumă Riemann corespunzătoare lui* P_ε *şi funcţiei*

$$f_D(x) = \{ \begin{array}{ll} 1, & x \in D \cup Fr(D) \\ 0, & altminteri \end{array}$$

avem

$$0 \leq S(P_\varepsilon; f_D) < \varepsilon.$$

Alegând punctele intermediare în $D \cup Fr(D)$, *când este posibil, deducem că* $D \cup Fr(D)$ *este inclusă într-o colecţie finită* $\{J_1, ..., J_n\}$ *de intervale închise din* P_ε *cu* $\mu(J_1) + ... + \mu(J_n) < \varepsilon$, *adică* D *este de măsură Jordan nulă.*

Prin urmare, o submulţime D *a lui* $\mathbb{R}^p$ *este de măsură Jordan nulă dacă şi numai dacă este măsurabilă în sensul Definiţiei 2 şi* $A(D) = 0$.

Lema 4. *Dacă* D_1 *şi* D_2 *sunt submulţimi mărginite, măsurabile a lui* $\mathbb{R}^p$, *atunci* $D_1 \cap D_2$ *şi* $D_1 \cup D_2$ *sunt măsurabile şi*

$$A(D_1) + A(D_2) = A(D_1 \cup D_2) + A(D_1 \cap D_2).$$

În particular, dacă $A(D_1 \cap D_2) = 0$, *atunci*

$$A(D_1) + A(D_2) = A(D_1 \cup D_2).$$

Demonstraţie. Deoarece, conform exerciţiului 12 de la pagina 116, avem

$$Fr(D_1 \cup D_2) \subseteq Fr(D_1) \cup Fr(D_2)$$

şi

$$Fr(D_1 \cap D_2) \subseteq Fr(D_1) \cup Fr(D_2),$$

deducem că mulţimile $Fr(D_1 \cup D_2)$ şi $Fr(D_1 \cap D_2)$ sunt de măsură Jordan nulă, deci mulţimile $D_1 \cup D_2$ şi $D_1 \cap D_2$ sunt măsurabile.

Folosind lema 3 (vezi pagina 435) putem presupune că mulţimile D_1 şi D_2 sunt închise.

Prin urmare $D_1 \cup D_2$ şi $D_1 \cap D_2$ sunt închise.

Fie f_1, f_2, f_i şi f_r funcţiile egale cu 1 pe D_1, D_2, $D_1 \cap D_2$ şi respectiv $D_1 \cup D_2$ şi prelungite cu 0 în afara acestora.

Aceste funcţii sunt integrabile şi

$$f_1 + f_2 = f_i + f_r.$$

Dacă J este un interval care conţine pe $D_1 \cup D_2$, atunci conform teoremei de la pagina ,

$$A(D_1) + A(D_2) = \int\limits_J f_1 + \int\limits_J f_2 = \int\limits_J (f_1 + f_2) =$$

$$= \int\limits_J (f_i + f_r) = \int\limits_J f_i + \int\limits_J f_r = A(D_1 \cup D_2) + A(D_1 \cap D_2). \ \square$$

Rezultatul următor exprimă faptul că integrala Riemann multiplă este aditivă în raport cu domeniul de integrare.

Teorema de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$ integrabilă, unde D este o submulţime compactă şi măsurabilă lui $\mathbb{R}^p$.*

Fie D_1 şi D_2 două submulţimi închise măsurabile ale lui D având următoarele proprietăţi:

i) $D = D_1 \cup D_2$

şi

ii) $D_1 \cap D_2$ este de măsură nulă.

Atunci f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2 şi

$$\int\limits_D f = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f.$$

Se poate justifica uşor următorul rezultat:

Teoremă. *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$ integrabilă pe D, unde D este o submulţime compactă şi măsurabilă a lui $\mathbb{R}^p$.*

Fie $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$.

Atunci

$$\left\| \int\limits_D f \right\| \leq M \cdot A(D).$$

În particular, dacă $f : D \to \mathbb{R}$ şi există $m, M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$m \leq f(x) \leq M,$$

pentru orice $x \in D$, atunci

$$m \cdot A(D) \leq \int\limits_D f \leq M \cdot A(D).$$

Teorema următoare extinde Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 411).

Teorema de medie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este compactă, conexă şi măsurabilă.*

Atunci există un punct p, aparţinând lui D, astfel ca

$$\int\limits_D f = f(p) \cdot A(D).$$

Integrala multiplă ca integrală iterată

Prezentăm în continuare modul în care putem reduce calculul integralei duble şi triple la integrale de ordin inferior prin scrierea acestora ca integrale iterate.

Teoremă. *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, unde există $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, atunci*

$$\iint\limits_D f = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x, y)dx)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)dy)dx.$$

Demonstraţie. Conform teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 424), avem

$$\int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx,$$

deci este suficient să arătăm că

$$\int\int_D f = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Fie $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, pentru orice $y \in [c,d]$.

Fie $c = y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_r = d$ o partiţie a lui $[c,d]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_s = b$ o partiţie a lui $[a,b]$, iar P partiţia lui D obţinută utilizând intervalele $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Pentru y_j^* un punct arbitrar din $[y_{j-1}, y_j]$, avem

$$F(y_j^*) = \int_a^b f(x, y_j^*)dx = \sum_{k=1}^{s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y_j^*)dx.$$

Conform primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 412), pentru orice j şi k, există $x_{jk}^* \in [x_{k-1}, x_k]$, astfel ca

$$F(y_j^*) = \sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Atunci

$$\sum_{j=1}^{r} F(y_j^*)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}),$$

de unde concluzia. $\square$

Mai general, are loc următorul rezultat:

Teoremă. *Dacă* $f : D \to \mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă, unde există* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$, *şi*

pentru orice $y \in [c,d]$, *integrala* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *există, atunci* F *este integrabilă pe* $[c,d]$ *şi*

$$\int\int\limits_D f = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Corolar. *Fie*

$$A = \{(x,y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),\, c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

unde $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ *sunt funcţii continue.*

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* A, *atunci* f *este integrabilă pe* A *şi*

$$\int\int\limits_A f = \int\limits_c^d (\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Demonstraţie. Putem presupune că f este 0 în afara lui A.

Deoarece $Fr(A) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ are măsură Jordan nulă, conform celei de a doua teoreme de integrare pentru integrala Riemann multiplă (vezi pagina 435), rezultă că f este integrabilă pe A.

Cum pentru un y fixat, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ există şi este egală cu $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$, concluzia decurge din teorema precedentă, unde $D = [a,b] \times [c,d]$. □

Pentru integrala triplă funcţionează rezultate similare.

Teoremă. *Fie* $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue, unde* D *este o submulţime compactă şi măsurabilă lui* $\mathbb{R}^2$, *astfel încât* $\alpha \leq \beta$ *şi* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D$ *şi* $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$.

Atunci, pentru orice funcţie continuă $f : M \to \mathbb{R}$, *avem*

$$\int\int\int\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \int\int\limits_D (\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz)dxdy.$$

Observaţie. *Rezultate similiare celor descrise mai sus (care poartă numele generic de formule Fubini), într-un cadru mult mai general, se vor studia la cursul de Teoria Măsurii.*

Notă istorică. *Guido Fubini* (1879-1943) a studiat la Veneţia şi la Scuola Normale Superiore di Pisa, unde i-a avut ca profesori pe Dini şi pe Bianchi care l-au canalizat spre cercetări de geometrie. Îşi susţine teza de doctorat în 1900. Predă la universităţile din Catania, Genova şi Torino. A tratat teme din diverse ramuri ale matematicii, precum ecuaţii diferenţiale, funcţii analitice, funcţii complexe de mai multe variabile, calculul variaţional, ecuaţii integrale neliniare, teoria grupurilor, geometrie neeuclidiană şi proiectivă. În timpul primului război mondial a studiat acurateţea tirurilor de artilerie, ceea ce l-a condus la studiul acusticii şi electricităţii. Datorită circumstanţelor politice emigrează în 1939 în Statele Unite ale Americii.

Schimbarea de variabile pentru integrala Riemann a funcţiilor de mai multe variabile

Un instrument foarte util în calculul integralelor multiple este dat de următorul rezultat.

Teorema de schimbare de variabile la integrala multiplă. *Fie* $\varphi : G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* G *astfel ca*

$$det J_\varphi(x) \neq 0,$$

pentru orice $x \in G$.

Dacă D *este o submulţime compactă şi măsurabilă lui* G*, iar* $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci* $\varphi(D)$ *este măsurabilă şi*

$$\int\limits_{\varphi(D)} f = \int\limits_{D} (f \circ \varphi) \left| det J_\varphi \right|.$$

Remarcă. *Concluzia este adevărată, chiar şi în cazul în care* $det J_\varphi$ *se anulează pe o mulţime de măsură Jordan nulă.*

Remarcă. *Din punct de vedere practic, avem de calculat* $\int\limits_{\varphi(D)} f$*. Formula de schimbare de variabile ne conduce la calculul integralei* $\int\limits_{D} (f \circ \varphi) \left| det J_\varphi \right|$,

în care structura "complicată" a lui $\varphi(D)$ este înlocuită cu structura mai "abordabilă" a lui D. Spre deosebire de cazul 1-dimensional, unde scopul schimbării de variabile este acela de a "simplifica" funcţia de integrat, în cazul multidimensional, accentul cade de "simplificarea" structurii domeniului pe care se integrează.

Remarcă. *Iată câteva schimbări de variabile standard:*

1. Trecerea la coordonate polare în plan

Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dată de*

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

pentru orice $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Avem

$$det J_\varphi((\rho, \theta)) = \rho,$$

pentru orice $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ *şi, evident,* φ *este de clasă* $\mathcal{C}^1$.

Dacă D_p *este o submulţime compactă şi măsurabilă lui* $\mathbb{R}^2$, $D_p \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ *are proprietatea că* $\varphi(D_p) = D$, *iar* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci* $\varphi(D)$ *este măsurabilă şi*

$$\int\int_{\varphi(D_p)=D} f(x, y) dx dy = \int\int_{D_p} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho d\theta.$$

2. Trecerea la coordonate polare în spaţiu

Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dată de*

$$\varphi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi),$$

pentru orice $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$.

Avem

$$det J_\varphi((\rho, \theta)) = \rho^2 \sin \varphi,$$

pentru orice $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ *şi, evident,* φ *este de clasă* $\mathcal{C}^1$.

Dacă D_s este o submulţime compactă şi măsurabilă lui $\mathbb{R}^3$, $D_s \subseteq [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ are proprietatea că $\varphi(D_s)=D$, iar $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(D)$ este măsurabilă şi

$$\int\int\int_{\varphi(D_s)=D} f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{D_s}\int \rho^2\sin\varphi f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)d\rho d\theta d\varphi.$$

Exerciţii

1. Să se calculeze:

i) $\int\int_D (x-y)dxdy$, unde D este domeniul mărginit limitat de dreptele $y=-1$, $y=1$, $y=x+1$ şi de parabola $x=y^2$.

ii) $\int\int_D (x^2+y)dxdy$, unde D este domeniul mărginit limitat de parabolele $x=y^2$ şi $y=x^2$.

iii) $\int\int_D xydxdy$, unde D este domeniul mărginit limitat de axele de coordonate şi de $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

iv) $\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, unde D este domeniul mărginit limitat de dreptele $x=2$, $y=x$ şi de $xy=1$.

2. Să se calculeze:

i) $\int\int_D \arcsin\frac{1}{2\pi}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid \pi^2\le x^2+y^2\le(2\pi)^2\}$.

ii) $\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2x\}$.

iii) $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.

iv) $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid ax\le x^2+y^2\le 2ax, y\ge 0\}$.

3. Să se calculeze:

i) $\int\int_D xdxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid 1\le xy\le 2, 1\le\frac{y}{x}\le 2, x>0\}$.

ii) $\int\int_D (x+y)dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 13, x\le y\le 5x\}$.

iii) $\int\int_D (x+y)dxdy$, unde $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

4. Să se calculeze:

i) $\int\int_V\int xyzdxdydz$, unde V este domeniul descris de: $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ şi $0\le z\le c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$;

ii) $\int\int\limits_V\int(x+y)zdxdydz$, unde V este domeniul limitat de: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ şi $x+y+z \leq 1$;

iii) $\int\int\limits_V\int zdxdydz$, unde V este domeniul limitat de: $z = 0$, $z = h$ şi $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $a, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$;

iv) $\int\int\limits_V\int(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde V este domeniul descris de: $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $a \in \mathbb{R}$;

v) $\int\int\limits_V\int(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}dxdydz$, unde V este domeniul descris de: $x^2+y^2+z^2 \leq z$.

REZUMAT

Vom numi măsura intervalului închis $J = [a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p]$ numărul $\mu(J) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_p - a_p)$.

O submulţime Z a lui $\mathbb{R}^p$ se numeşte de măsură Jordan nulă dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există o familie finită $\{J_1, ..., J_n\}$ de intervale închise astfel încât Z este conţinută în reuniunea elementelor acestei familii şi $\mu(J_1) + ... + \mu(J_n) < \varepsilon$.

În cele ce urmează vom presupune că $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie mărginită. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}^q$ prelungită cu valoarea 0 în afara lui D, se va nota tot cu f. Deoarece $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă, există I_f un interval închis din $\mathbb{R}^p$, care conţine pe D. Să presupunem că $I_f = [a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p]$, unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., p\}$, fie P_k o partiţie a lui $[a_k, b_k]$. Aceste partiţii induc o partiţie P a lui I_f într-un număr finit de intervale închise din $\mathbb{R}^p$. Dacă P şi Q sunt partiţii ale lui I_f spunem că P este o rafinare a lui Q dacă orice interval al lui P este conţinut într-un interval al lui Q.

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime compactă, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie mărginită. O sumă Riemann a lui f corespunzătoare partiţiei $P = (J_1, J_2, ..., J_n)$ a lui I_f, are forma $S(P; f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\mu(J_k)$, unde $x_k \in J_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Funcţia f se numeşte integrabilă Riemann dacă există un element $L \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există P_ε o partiţie a lui I_f astfel ca, pentru

orice partiţie P, care este o rafinare a lui P_ε şi orice sumă Riemann $S(P;f)$ corespunzătoare lui P, avem $\|S(P;f) - L\| < \varepsilon$. În acest caz, L este unic determinat, nu depinde de I_f, se numeşte integrala Riemann a lui f pe D şi se notează $\int\limits_D f$ sau, pentru $p = 2$, $\iint\limits_D f$ sau $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, sau, pentru $p = 3$, $\iiint\limits_D f$ sau $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$.

Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$ continuă, unde D este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^p$, care are frontiera de măsură Jordan nulă. Atunci f este integrabilă pe D.

Pentru D o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^p$, care are frontiera de măsură Jordan nulă, spunem că D este măsurabilă şi definim măsura lui D, notată cu $A(D)$, ca fiind $\int\limits_{D\cup Fr(D)} 1dx$.

Fie $A = \{(x,y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),\ c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$, unde $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ sunt funcţii continue. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe A, atunci f este integrabilă pe A şi $\iint\limits_A f = \int\limits_c^d (\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx)dy$.

Fie $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ două funcţii continue, unde D este o submulţime compactă şi măsurabilă lui $\mathbb{R}^2$, astfel încât $\alpha \leq \beta$ şi $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D$ şi $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$. Atunci, pentru orice funcţie continuă $f : M \to R$, avem $\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D (\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz)dxdy$.

Fie $\varphi : G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe G astfel ca $detJ_\varphi(x) \neq 0$, pentru orice $x \in G$. Dacă D este o submulţime compactă şi măsurabilă lui G, iar $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(D)$ este măsurabilă şi $\int\limits_{\varphi(D)} f = \int\limits_D (f \circ \varphi) |detJ_\varphi|$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

2. *Tom M. Apostol*, **Mathematical Analysis**, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1957, - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 36591

INTEGRALE IMPROPRII

În secţiunea de faţă ne vom întoarce la integrarea funcţiilor de o variabilă reală şi vom iscuta despre integrale improprii, adică despre integrale care sunt definite ca limite de integrale Riemann.

Integrala improprie: cazul funcţiilor nemărginite
Integrala improprie: cazul domeniilor nemărginite

În secţiunile anterioare am considerat funcţii mărginite, care au domeniul de definiţie o mulţime compactă. Dacă se renunţă la una dintre aceste ipoteze, teoria prezentată nu mai este valabilă fără a se opera anumite schimbări. Întrucât în multe aplicaţii este de dorit să se opereze cu funcţii care nu sunt mărginite sau care nu au domeniul de definiţie o mulţime compactă, vom prezenta teoria integralei şi în acest caz.

Integrala improprie: cazul funcţiilor nemărginite

Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ şi f o funcţie cu valori reale al cărei domeniu de definiţie conţine pe $(a, b]$.

Să presupunem că f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$ şi să notăm

$$I_c = \int_c^b f.$$

Vom defini integrala improprie a lui f, pe $J = [a, b]$, ca fiind limita lui I_c, atunci când c tinde către a.

Definiţie. *Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ şi f o funcţie cu valori reale, al cărei domeniu de definiţie conţine pe $(a, b]$.*

Să presupunem că f este integrabilă Riemann, pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$ şi să notăm

$$I_c = \int_c^b f.$$

Dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $c \in (a, a + \delta_\varepsilon)$ să avem

$$|I_c - I| < \varepsilon,$$

spunem că I este integrala improprie a lui f pe $J = [a, b]$ şi vom nota această valoare prin $\int\limits_{a+}^{b} f$ sau prin $\int\limits_{a+}^{b} f(x)dx$.

Observaţie. *Aşadar*

$$\int\limits_{a+}^{b} f = \lim_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int\limits_{c}^{b} f.$$

Observaţie. *De multe ori semnul + din limita inferioară de integrare este omis.*

Exemple

1. *Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ şi f o funcţie mărginită cu valori reale al cărei domeniu de definiţie conţine pe $(a, b]$.*

Dacă f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$, atunci există $\int\limits_{a+}^{b} f$.

Spre exemplu, funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \sin(\frac{1}{x}),$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$.

2. *Funcţia*

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

unde $x \in (0, 1]$, nu este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$.

3. *Funcţia*

$$f(x) = x^\alpha,$$

unde $x \in (0, 1]$, este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$, pentru $\alpha \in (-1, 0)$ şi nu este intergrabilă impropriu pe $[0, 1]$, pentru $\alpha \in (-\infty, -1)$.

Discuţia precedentă a tratat funcţiile care nu sunt definite sau nu sunt mărginite în capătul din stânga al intervalului. Este evident cum se tratează cazul în care funcţia are un comportament similar în capătul din dreapta al intervalului. Mai interesant este cazul în care funcţia nu este definită sau nu este mărginită într-un punct interior al intervalului.

Dacă p este un punct interior intervalului $[a, b]$, iar funcţia f este definită în orice punct din $[a, b]$, exceptând eventual pe p, şi dacă există integralele improprii $\int_a^{p-} f$ şi $\int_{p+}^b f$, atunci definim integrala improprie a lui f, pe $[a, b]$, ca fiind suma celor două integrale improprii anterioare. Altfel spus, definim integrala improprie a lui f pe $[a, b]$ ca fiind

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{p-\varepsilon} f + \lim_{\delta \to 0+} \int_{p+\delta}^b f.$$

Este clar că, dacă există cele două limite de mai sus, atunci există şi limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right)$$

şi

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{p-\varepsilon} f + \lim_{\delta \to 0+} \int_{p+\delta}^b f.$$

Să observăm că existenţa limitei $\lim_{\varepsilon \to 0+} (\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f)$ nu implică existenţa limitelor $\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{p-\varepsilon} f$ şi $\lim_{\delta \to 0+} \int_{p+\delta}^b f$.

Spre exemplu pentru $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$, avem $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^3} dx = 0$, pentru orice $\varepsilon \in (0, 1)$, dar integralele improprii $\int_{-1}^{0-} \frac{1}{x^3} dx$ şi $\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^3} dx$ nu există.

În cazul în care există, limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{a}^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^{b} f \right)$$

se va nota $(CPV)\int_{a}^{b} f$ *şi se va numi valoarea principală Cauchy a integralei.*

În cazul în care funcţia are un număr finit de puncte în care nu este definită sau nu este mărginită, putem împărţi intervalul în subintervale care au ca extremităţi aceste puncte.

Integrala improprie (infinită): cazul domeniilor nemărginite

Este important să se extindă noţiunea de funcţie integrabilă şi în cazul funcţiilor care au drept domeniu de definiţie o mulţime nemărginită. De exemplu, dacă f este definită pe $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, ia valori în $\mathbb{R}$ şi este integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, folosind notaţia $I_c \overset{not}{=} \int_{a}^{c} f$, definim integrala improprie a lui f, pe $[a, \infty)$, ca fiind limita lui I_c, atunci când c tinde către ∞.

Definiţie. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *o funcţie integrabilă Riemann pe* $[a, c]$, *pentru orice* $c > a$ *şi*

$$I_c = \int_{a}^{c} f.$$

Un număr real I *se numeşte integrala improprie a lui* f, *pe* $[a, \infty)$, *dacă pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există* $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, *astfel ca, pentru orice* $c \in \mathbb{R}$, $c > M_\varepsilon$, *avem*

$$|I - I_\varepsilon| < \varepsilon.$$

În acest caz numărul real I *se notează cu* $\int_{a}^{\infty} f$ *sau cu* $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ *şi se mai numeşte integrala infinită a lui* f *pe* $[a, \infty)$ *(după terminologia introdusă de Geoffrey Hardy (1877-1947), profesor la Cambridge).*

Observaţie. *Aşadar*

$$\int_a^\infty f = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f.$$

Exemple

1. Fie

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

unde $x \in [a, \infty)$, $a > 0$.

Integrala infinită a lui f pe $[a, \infty)$ nu există.

2. Fie funcţia

$$f(x) = x^\alpha,$$

unde $x \in [a, \infty)$, $a > 0$, iar $\alpha \neq -1$.

Atunci integrala infinită a lui f pe $[a, \infty)$ nu există pentru $\alpha > -1$ şi există pentru $\alpha < -1$.

3. Fie funcţia

$$f(x) = e^{-x},$$

unde $x \in \mathbb{R}$.

Atunci integrala infinită a lui f pe $[0, \infty)$ există şi este 1.

Observaţie. *Putem considera de asemenea cazul funcţiilor definite pe* $\mathbb{R}$. *În acest caz cerem ca* f *să fie integrabilă Riemann pe orice interval din* $\mathbb{R}$ *şi considerăm limitele*

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f \overset{not}{=} \int_{-\infty}^a f$$

şi

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c f \overset{not}{=} \int_a^\infty f.$$

Este uşor de demonstrat că dacă cele două limite de mai sus există pentru o anume valoare a lui a, *atunci ele există pentru orice valoare a lui* a. *În*

acest caz definim integrala improprie a lui f pe $\mathbb{R}$ (sau integrala infinită a lui f pe $\mathbb{R}$) ca fiind suma integralelor de mai sus, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f + \lim_{c\to\infty}\int_{a}^{c} f.$$

Este clar că dacă există cele două limite de mai sus, atunci există şi limita

$$\lim_{c\to\infty}(\int_{-c}^{a} f + \int_{a}^{c} f)$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f + \lim_{c\to\infty}\int_{a}^{c} f = \lim_{c\to\infty}(\int_{-c}^{a} f + \int_{a}^{c} f).$$

Dacă există, $\lim\limits_{c\to\infty}(\int\limits_{-c}^{a} f + \int\limits_{a}^{c} f)$ se va numi valoarea principală Cauchy a integralei şi se va nota cu

$$(CPV)\int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Să observăm că existenţa $(CPV)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$ nu implică existenţa $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$. Spre exemplu pentru $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, avem $\int\limits_{-c}^{c} xdx = 0$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$, dar integralele improprii $\int\limits_{-\infty}^{0} xdx$ şi $\int\limits_{0}^{\infty} xdx$ nu există.

Prezentăm în continuare câteva criterii pentru existenţa integralei improprii a unei funcţii f, pe $[a, \infty)$.

Pentru început iată un criteriu general de tip Cauchy.

Criteriul lui Cauchy. *Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$.*

Atunci $\int\limits_a^\infty f$ *există dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *există* $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *astfel încât avem*

$$\left| \int\limits_c^b f \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $b \geq c \geq K_\varepsilon$.

Următoarele trei criterii vizează funcţii care au valori pozitive.

Teoremă. *Fie* $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *o funcţie integrabilă Riemann pe* $[a, c]$, *pentru orice* $c > a$.

Atunci $\int\limits_a^\infty f$ *există dacă şi numai dacă mulţimea* $\{I_c \mid c \geq a\}$ *este mărginită.*

În acest caz

$$\int\limits_a^\infty f = \sup_{c \geq a} \int\limits_a^c f.$$

Criteriu de comparaţie cu inegalităţi. *Fie* $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *două funcţii integrabile Riemann pe* $[a, c]$, *pentru orice* $c > a$, *astfel ca*

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Atunci, dacă există $\int\limits_a^\infty g$ *există şi* $\int\limits_a^\infty f$.

În plus,

$$0 \leq \int\limits_a^\infty f \leq \int\limits_a^\infty g.$$

Criteriu de comparaţie la limită. *Fie* $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *două funcţii integrabile Riemann pe* $[a, c]$, *pentru orice* $c > a$, *astfel ca*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Atunci integralele $\int\limits_a^\infty g$ *şi* $\int\limits_a^\infty f$ *au aceeaşi natură; altfel spus ele există sau nu, simultan.*

Un criteriu foarte util, care va fi folosit în cadrul observaţiei de la pagina 458, este următorul:

Criteriu lui Dirichlet. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *o funcţie continuă cu proprietatea că există* $M \in \mathbb{R}$, *astfel ca*

$$\left|\int\limits_a^c f\right| \leq M,$$

pentru orice $c \geq a$.

Fie $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie descrescătoare cu proprietatea că*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Atunci există integrala $\int\limits_a^\infty fg$.

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \geq K_\varepsilon$ avem

$$0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dacă $b \geq c \geq K_\varepsilon$, conform celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes, punctul c) (vezi pagina 414), există,$\zeta \in [c, b]$ astfel ca

$$\int\limits_c^b fg = g(c)\int\limits_c^\zeta f.$$

Deoarece

$$\left|\int\limits_c^\zeta f\right| = \left|\int\limits_a^\zeta f - \int\limits_a^c f\right| \leq \left|\int\limits_a^\zeta f\right| + \left|\int\limits_a^c f\right| \leq 2M,$$

rezultă că, pentru $b \geq c \geq K_\varepsilon$, avem

$$\left|\int\limits_c^b fg\right| \leq \varepsilon,$$

de unde, în conformitate cu criteriul lui Cauchy, există integrala $\int\limits_a^\infty fg$. $\square$

Observaţie. *Problema definirii integralei improprii pentru funcţii având mai mult de o variabilă este mult mai complexă. Spre exemplu, dacă* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă şi dorim să definim* $\int\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$*, ideea cea mai la îndemână este aceea de a o defini ca fiind* $\lim\limits_{r\to\infty}\int\int\limits_{S_r} f(x,y)dxdy$*, unde* $(S_r)_r$ *constituie o familie de mulţimi măsurabile a căror reuniune acoperă* $\mathbb{R}^2$*. Dificultatea constă în multitudinea posibilităţilor de a alege familiile* $(S_r)_r$ *şi în neexistenţa unei garanţii că diverse alegeri pentru familiile* $(S_r)_r$ *vor genera aceeaşi valoare a limitei. Lucrurile decurg "bine" atunci când* $f \geq 0$ *sau atunci când integrala converge absolut (i.e. atunci când integrala lui* $|f|$ *este convergentă). Amănunte privind această tematică se pot găsi în* ***Advanced Calculus****, Gerald B. Folland, Prentice Hall, 2002, paginile 202-206.*

Exemple

1. Să se arate că există $\int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

2. Să se arate că există $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ şi că valoarea ei este $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Observaţie. *Funcţia* $x \to e^{-x^2}$ *apare în multe contexete (ca de exemplu în teoria probabilităţilor sau în statistică). Primitiva acestei funcţii nu se poate exprima cu ajutorulo funcţiilor elementare folosind un număr finit de operaţii elementare (* vezi *Maxwell Rosenlicht,* **Integration in finite terms**, American Mathematical Monthly 79, 1972, paginile 963-972, *Joseph Fels Ritt,* **Integration in finite terms: Liouville's theory of elementary methods**, New York: Colombia University Press; London: Oxford University Press IX, 1948 sau http://www.sosmath.com/calculus/integration/fant/fant.html *). Formula de mai sus prezintă numărul* π *într-un nou contex care nu are nimic în comun cu noţiunea de cerc.*

3. Să se arate că pentru $p > 0$, există $\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^p}dx$.

4. Să se arate că integrala $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)dx$, numită integrala lui Fresnel (Augustin Fresnel (1788-1827), matematician şi fizician francez), există.

Este de remarcat că $\sin(x^2)$ nu tinde către 0, atunci când x tinde către ∞.

5. Să se arate că există integrala $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, unde $\alpha \geq 1$. Să se comenteze cazul $\alpha \in (0,1)$.

REZUMAT

Fie $J = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ şi f o funcţie cu valori reale, al cărei domeniu de definiţie conţine pe $(a,b]$. Să presupunem că f este integrabilă Riemann, pe orice interval $[c,b]$, unde $c \in (a,b]$ şi să notăm $I_c = \int\limits_c^b f$. Dacă există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $c \in (a, a+\delta_\varepsilon)$ să avem $|I_c - I| < \varepsilon$, spunem că I este integrala improprie a lui f pe $J = [a,b]$ şi vom nota această valoare prin $\int\limits_{a+}^b f$ sau prin $\int\limits_{a+}^b f(x)dx$, deşi de multe ori semnul + din limita inferioară de integrare este omis.

Dacă p este un punct interior intervalului $[a,b]$, iar funcţia f este definită în orice punct din $[a,b]$, exceptând eventual pe p, şi dacă există integralele improprii $\int\limits_a^{p-} f$ şi $\int\limits_{p+}^b f$, atunci definim integrala improprie a lui f, pe $[a,b]$, ca fiind suma celor două integrale improprii anterioare. Altfel spus, definim integrala improprie a lui f pe $[a,b]$ ca fiind $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{p-\varepsilon} f + \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_{p+\delta}^b f$. În cazul în care există, limita $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} (\int\limits_a^{p-\varepsilon} f + \int\limits_{p+\varepsilon}^b f)$ se va nota $(CPV)\int\limits_a^b f$ şi se va numi valoarea principală Cauchy a integralei.

Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,c]$, pentru orice $c > a$, iar $I_c = \int\limits_a^c f$. Un număr real I se numeşte integrala improprie a lui f, pe $[a,\infty)$, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca, pentru orice $c \in \mathbb{R}$, $c > M_\varepsilon$, avem $|I - I_\varepsilon| < \varepsilon$. În acest caz numărul real I se notează cu $\int\limits_a^\infty f$ sau cu $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ şi se

mai numeşte integrala infinită a lui f pe $[a,\infty)$. Putem considera de asemenea cazul funcţiilor definite pe $\mathbb{R}$. În acest caz cerem ca f să fie integrabilă Riemann pe orice interval din $\mathbb{R}$ şi considerăm limitele $\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f \overset{not}{=} \int\limits_{-\infty}^a f$ şi $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_a^c f \overset{not}{=} \int\limits_a^\infty f$. Este uşor de demonstrat că dacă cele două limite de mai sus există pentru o anume valoare a lui a, atunci ele există pentru orice valoare a lui a. În acest caz definim integrala improprie a lui f pe $\mathbb{R}$ (sau integrala infinită a lui f pe $\mathbb{R}$) ca fiind suma integralelor de mai sus, adică $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f + \lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_a^c f$. Dacă există, $\lim\limits_{c\to\infty}(\int\limits_{-c}^a f + \int\limits_a^c f)$ se va numi valoarea principală Cauchy a integralei şi se va nota cu $(CPV)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$.

Fie $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, unde $a\in\mathbb{R}$, două funcţii integrabile Riemann pe $[a,c]$, pentru orice $c>a$, astfel ca $0\le f(x)\le g(x)$, pentru orice $x\in[a,\infty)$. Atunci, dacă există $\int\limits_a^\infty g$ există şi $\int\limits_a^\infty f$. În plus, $0\le\int\limits_a^\infty f\le\int\limits_a^\infty g$.

Fie $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, unde $a\in\mathbb{R}$, două funcţii integrabile Riemann pe $[a,c]$, pentru orice $c>a$, astfel ca $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$. Atunci integralele $\int\limits_a^\infty g$ şi $\int\limits_a^\infty f$ au aceeaşi natură; altfel spus ele există sau nu, simultan.

Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}$, o funcţie continuă. Să presupunem că există $M\in\mathbb{R}$, astfel ca $\left|\int\limits_a^c f\right|\le M$, pentru orice $c\ge a$ şi că $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcţie descrescătoare ce tinde către zero, atunci când x tinde către ∞. Atunci există integrala $\int\limits_a^\infty fg$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

CONVERGENŢĂ UNIFORMĂ ŞI ABSOLUTĂ

Noţiunea de convergenţă absolută
Noţiunea de convergenţă uniformă
Criterii de convergenţă uniformă

Ca şi în cazul seriilor, putem discuta despre convergenţa absolută a unei integrale.

Noţiunea de convergenţă absolută

Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, *unde* $a\in\mathbb{R}$, *o funcţie integrabilă Riemann pe* $[a,c]$, *pentru orice* $c>a$.

Atunci $|f|$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,c]$, *pentru orice* $c>a$.

Deoarece

$$-|f|\le f\le |f|$$

deducem că dacă există $\int\limits_a^\infty |f|$, *atunci există şi* $\int\limits_a^\infty f$, *şi, mai mult*

$$\left|\int\limits_a^\infty f\right|\le\int\limits_a^\infty |f|\,.$$

Definiţie. *Fie* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, *unde* $a\in\mathbb{R}$. *Dacă există* $\int\limits_a^\infty |f|$ *spunem că* f *este absolut integrabilă pe* $[a,\infty)$ *sau că* $\int\limits_a^\infty f$ *converge absolut.*

Observaţie. $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ *există, dar nu este absolut convergentă.*

Într-adevăr, existenţa acestei integrale este asigurată de criteriul lui Dirichlet (vezi pagina 448).

În plus, pentru orice $k\in\mathbb{N}$ există un interval J_k de lungime $b>0$, astfel ca:

$$J_k\subseteq[k\pi,(k+1)\pi]$$

şi

$$|\sin x| \geq \frac{1}{2},$$

pentru orice $x \in J_k$.

Atunci

$$\int_{\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \geq \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx + ... + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \geq$$

$$\geq \frac{b}{2}(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi} + ... + \frac{1}{k\pi}),$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Prin urmare $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ nu este absolut convergentă.

Noţiunea de convergenţă uniformă

În multe aplicaţii este important să considerăm integrale infinite, în care integrantul depinde de un parametru. Pentru a manevra astfel de situaţii este de importanţă majoră noţiunea de convergenţă uniformă a integralei în raport cu parametrul.

Definiţie. *Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se presupune că, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, există $F(t) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x, t) dx$.*

Vom spune că această convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$) dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $c \geq M_\varepsilon$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem

$$\left| F(t) - \int_{a}^{c} f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Definiţii similare se pot enunţa pentru $t \in [\alpha, \infty)$ sau $t \in \mathbb{N}$.

Criterii de convergenţă uniformă

Prezentăm în continuare câteva criterii pentru convergenţa uniformă.

Criteriul de tip Cauchy prezentat mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei criteriilor lui Weierstrass şi Dirichlet (vezi pagina).

Criteriul lui Cauchy. *Fie* $f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, *unde* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Să presupunem că, pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$, *există* $F(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$.

Atunci convergenţa este uniformă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, *există* $K_\varepsilon\in\mathbb{R}$ *astfel ca, pentru orice* $b\geq c\geq K_\varepsilon$ *şi orice* $t\in[\alpha,\beta]$, *avem*

$$\left|\int\limits_c^b f(x,t)dx\right|<\varepsilon.$$

Criteriul de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei de la pagina .

Criteriul lui Weierstrass. *Fie* $f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, *unde* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Să presupunem că, pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$ *şi orice* $c\geq a$, *funcţia* $f(.,t)$ *este integrabilă pe* $[a,c]$ *şi că există o funcţie* $M:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$ *astfel ca*

$$|f(x,t)|\leq M(x),$$

pentru orice $x\in[a,\infty)$ *şi orice* $t\in[\alpha,\beta]$, *şi că, în plus, există*

$$\int\limits_a^\infty M.$$

Atunci, pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$, *integrala* $F(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *este (absolut) convergentă, iar convergenţa este uniformă în raport cu* $t\in[\alpha,\beta]$.

Demonstraţie. Evident $\int\limits_a^\infty|f(x,t)|\,dx$ este convergentă, deci integrala $F(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ este absolut convergentă, pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$.

Pe de altă parte, inegalitatea

$$\left|\int\limits_c^b f(x,t)dx\right|\leq\int\limits_c^b|f(x,t)|\,dx\leq\int\limits_c^b M(x)dx,$$

împreună cu Criteriul lui Cauchy, implică convergenţa uniformă în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$. $\square$

Remarcă. *Criteriul lui Weierstrass este util atunci când convergenţa este absolută şi uniformă, dar nu este instrumentul potrivit atunci când convergenţa este neabsolută şi uniformă. În acest caz se apelează la următorul*:

Criteriul lui Dirichlet. *Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă.*

Să presupunem că există $A \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\left| \int_a^c f(x,t)dx \right| \le A$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ şi orice $c \ge a$.

În plus, să considerăm funcţia $\varphi : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:

i) funcţia $x \to \varphi(x,t)$ este descrescătoare, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$,

şi

ii) funcţia $x \to \varphi(x,t)$ converge către 0, atunci când x tinde către ∞, uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$, (adică pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $x \in [K_\varepsilon, \infty)$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem $0 \le \varphi(x,t) \le \varepsilon$).

În aceste condiţii, integrala

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\varphi(x,t)dx$$

converge uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $x \in [K_\varepsilon, \infty)$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem

$$0 \le \varphi(x,t) \le \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Dacă $b \ge c \ge K_\varepsilon$, conform celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 415), pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, există

$\xi_t \in [c,b]$ astfel ca

$$\int_c^b \varphi(x,t)f(x,t)dx = \varphi(c,t)\int_c^{\xi_t} f(x,t)dx.$$

Prin urmare, pentru $b \geq c \geq K_\varepsilon$ şi $t \in [\alpha,\beta]$, avem

$$\left|\int_c^b f(x,t)\varphi(x,t)dx\right| \leq \varphi(c,t)2A < \varepsilon,$$

de unde, conform Criteriului lui Cauchy, convergenţa este uniformă. $\square$

Exemple-Exerciţii

1. Integrala $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx$ converge uniform în raport cu $t \in \mathbb{R}$.

2. Integrala $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^t dx$ converge uniform în raport cu $t \in [0,\beta]$, pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, dar nu converge uniform în raport cu $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Integrala $\int\limits_0^\infty e^{-tx}\sin(x)dx$ converge uniform în raport cu $t \in [\gamma,\infty)$, pentru orice $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

4. Integrala $\int\limits_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx$, unde funţia de sub integrală se consideră a lua valoarea 1 pentru $x = 0$, converge uniform în raport cu $t \in [0,\infty)$.

REZUMAT

Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Dacă există $\int\limits_a^\infty |f|$ spunem că f este absolut integrabilă pe $[a,\infty)$ sau că $\int\limits_a^\infty f$ converge absolut.

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Se presupune că, pentru orice $t \in [\alpha,\beta]$, există $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$. Vom spune că această

convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$) dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $c \geq M_\varepsilon$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem $\left| F(t) - \int\limits_a^c f(x,t)dx \right| < \varepsilon$. Definiţii similare se pot enunţa pentru $t \in [\alpha, \infty)$ sau $t \in \mathbb{N}$.

Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se presupune că, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ şi orice $c \geq a$, funcţia $f(., t)$ este integrabilă pe $[a, c]$ şi că există o funcţie $M : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$, astfel ca, pentru orice $x \in [a, \infty)$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem $|f(x,t)| \leq M(x)$, şi că, în plus, există $\int\limits_a^\infty M$. Atunci, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, integrala $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ este (absolut) convergentă, iar convergenţa este uniformă în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Se presupune că există $A \in \mathbb{R}$, astfel ca $\left| \int\limits_a^c f(x,t)dx \right| \leq A$, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ şi orice $c \geq a$. În plus, se consideră funcţia $\varphi : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi: pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, $x \to \varphi(x,t)$ este descrescătoare şi converge către 0, atunci când x tinde către ∞, uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$, (adică pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $x \in [K_\varepsilon, \infty)$ şi orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem $0 \leq \varphi(x,t) \leq \varepsilon$). Atunci integrala $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)\varphi(x,t)dx$ converge uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRALE IMPROPRII (INFINITE) CU PARAMETRU

Continuitatea în raport cu parametrul
Teorema de inversare a ordinii de integrare
Derivabilitatea în raport cu parametrul

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă.

Se presupune că, pentru orice $t \in [\alpha,\beta]$, există $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$.

Vom arăta că dacă această convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha,\beta]$), atunci F este continuă, iar integrala sa poate fi calculată schimbând ordinea de integrare. Un rezultat similar va fi demonstrat pentru derivată.

Continuitatea în raport cu parametrul

Teoremă. *Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă astfel ca pentru orice $t \in [\alpha,\beta]$, există $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$, iar această convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha,\beta]$).*

Atunci F este continuă.

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $F_n : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t) = \int\limits_a^{a+n} f(x,t)dx.$$

Conform teoremei de la pagina 423, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcţia F_n este continuă.

Cum şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către F, deducem, folosind teorema de la pagina 241, că funcţia F este continuă. $\square$

Teorema de inversare a ordinii de integrare

Teoremă. *În ipotezele anterioare, avem*

$$\int\limits_\alpha^\beta F(t)dt = \int\limits_a^\infty (\int\limits_\alpha^\beta f(x,t)dt)dx,$$

adică

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\int_{a}^{\infty}f(x,t)dx)dt=\int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\beta}f(x,t)dt)dx.$$

Demonstraţie. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, fie $F_n:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t)=\int_{a}^{a+n}f(x,t)dx.$$

Atunci, conform teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 426), avem

$$\int_{\alpha}^{\beta}F_n(t)dt=\int_{\alpha}^{a+n}(\int_{\alpha}^{\beta}f(x,t)dt)dx.$$

Cum şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către F, deducem, folosind teorema de permutare a limitei cu integrala de la pagina 397, că

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\int_{a}^{\infty}f(x,t)dx)dt=\int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\beta}f(x,t)dt)dx. \ \square$$

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Teoremă. *Fie $f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, o funcţie continuă având următoarele proprietăţi:*

i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ *este continuă;*

ii) există

$$F(t)=\int_{a}^{\infty}f(x,t)dx,$$

pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$;

iii) $G(t)=\int_{a}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ *converge uniform (în raport cu* $t\in[\alpha,\beta]$*).*

Atunci F este derivabilă şi

$$F^{'}=G.$$

Altfel spus, avem

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_a^\infty f(x,t)dx) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $F_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x,t)dx.$$

Atunci, conform teoremei de la pagina 424, F_n este derivabilă şi

$$F_n^{'}(t) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Cum şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către F, iar şirul $(F_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către G, deducem, folosind teorema de la pagina 318, că

$$F^{'} = G. \ \square$$

Exemple

1. Pentru $0 < \alpha < \beta$ avem $\log(\frac{\beta}{\alpha}) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx$.

2. $\Gamma(n+1) = n!$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Funcţia Γ este continuă pe $(1, \infty)$.

4. Pentru $t \geq 0$ şi $u \geq 0$,

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(ux)}{x}dx = \text{arctg}(\frac{u}{t}).$$

În particular, avem

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin(ux)}{x}dx,$$

unde $u > 0$.

Observaţie. *Problema calculului valorilor unor integrale improprii precum cea de mai sus şi cea a integralei lui Fresnel (vezi pagina 455), dar nu numai, se va relua în cadrul cursului de Analiză Complexă ca o aplicaţie a teoremei reziduurilor* (vezi *P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu*, **Analiză Matematică (Funcţii Complexe)**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, paginile 121-133).

REZUMAT

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă astfel ca pentru orice $t \in [\alpha,\beta]$, există $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$, iar această convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha,\beta]$). Atunci F este continuă.

În ipotezele anterioare, avem $\int_\alpha^\beta F(t)dt = \int_a^\infty (\int_\alpha^\beta f(x,t)dt)dx$, adică $\int_\alpha^\beta (\int_a^\infty f(x,t)dx)dt = \int_a^\infty (\int_\alpha^\beta f(x,t)dt)dx$.

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă cu derivate parţiale continue, astfel ca pentru orice $t \in [\alpha,\beta]$, există $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$, iar $G(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ converge este uniform (în raport cu $t \in [\alpha,\beta]$). Atunci F este derivabilă şi $F' = G$. Altfel spus, avem $\frac{\partial}{\partial t}(\int_a^\infty f(x,t)dx) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

ŞIRURI DE INTEGRALE IMPROPRII (INFINITE)

Teorema de convergenţă dominată a lui Lebesgue pentru integrale infinite
Teorema de convergenţă monotonă pentru integrale infinite

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Presupunem că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $\int\limits_a^\infty f_n$ şi că există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [a,\infty)$.

Am dori să vedem în ce condiţii există $\int\limits_a^\infty f$ şi are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f_n = \int\limits_a^\infty f$.

Să observăm că, dacă definim, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1,n] \\ 0, & x \in (n,\infty) \end{cases}$, atunci există $\int\limits_1^\infty f_n$, şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, crescător, converge uniform către o funcţie continuă, care nu este integrabilă pe $[1,\infty)$.

Aşadar, în general, nu există $\int\limits_a^\infty f$.

Mai mult, dacă definim, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0,n^2] \\ 0, & x \in (n^2,\infty) \end{cases}$, atunci există $\int\limits_0^\infty g_n$, şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi converge uniform către o funcţie g pentru care există $\int\limits_0^\infty g$, dar egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty g_n = \int\limits_0^\infty g$ nu este valabilă.

Aşadar, în general, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f_n \neq \int\limits_a^\infty f$.

Prezentăm mai jos două rezultate care furnizează condiţii suficiente pentru existenţa $\int\limits_a^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ şi pentru asigurarea egalităţii $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f_n = \int\limits_a^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Primul dintre ele se dovedeşte util în cadrul rezolvării execiţiilor 3 şi 4 de la pagina ... .

Teorema de convergenţă dominată pentru integrale infinite

Teorema de convergenţă dominată. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de funcţii,* $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *astfel ca pentru orice* $x \in [a,\infty)$, *există* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$.

Să prespunem că pentru orice $c \in (a,\infty)$ *şi pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, f *şi* f_n *sunt integrabile Riemann pe* $[a,c]$ *şi că există o funcţie* $M : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *având următoarele proprietăţi:*

i) există $\int\limits_a^\infty M$;

ii)

$$|f_n(x)| \leq M(x),$$

pentru orice $x \in [a,\infty)$ *şi orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci există $\int\limits_a^\infty f$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f_n = \int\limits_a^\infty f = \int\limits_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Demonstraţie. Utilizând criteriul de comparaţie (vezi pagina 461) şi ipoteza, rezultă că există $\int\limits_a^\infty f$ şi $\int\limits_a^\infty f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Existenţa $\int\limits_a^\infty M$, ne asigură că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $K \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\int\limits_K^\infty M < \varepsilon,$$

deci

$$\int\limits_K^\infty f_n < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\int\limits_K^\infty f < \varepsilon.$$

În conformitate cu teorema de convergenţă dominată (vezi pagina 398), avem

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^K f_n = \int_a^K f,$$

deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\left|\int_a^K f_n - \int_a^K f\right| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru un astfel de n, avem

$$\left|\int_a^\infty f - \int_a^\infty f_n\right| \leq \left|\int_a^K f - \int_a^K f_n\right| + \left|\int_K^\infty f - \int_K^\infty f_n\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^K f - \int_a^K f_n\right| + \left|\int_K^\infty f\right| + \left|\int_K^\infty f_n\right| < 3\varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\left|\int_a^\infty f - \int_a^\infty f_n\right| \leq 3\varepsilon$$

i.e.

$$\int_a^\infty f = \lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n. \ \square$$

Teorema de convergenţă monotonă pentru integrale infinite

Teorema convergenţei monotone. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit şi crescător de funcţii, $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$.*

Să presupunem că există $\int_a^\infty f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi fie $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$, pentru orice $x \in [a,\infty)$,

Atunci există $\int\limits_a^\infty f$ *dacă şi numai dacă mulţimea* $\{\int\limits_a^\infty f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este mărginită.*

În acest caz

$$\int\limits_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \int\limits_a^\infty f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^\infty f_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty f_n.$$

Demonstraţie. Fără pierderea generalităţii, putem presupune că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $x \in [a,\infty)$, $f_n(x) \geq 0$.

Şirul $(\int\limits_a^\infty f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.

Dacă există $\int\limits_a^\infty f$, conform teoremei de convergenţă dominată pentru integrale infinite (vezi pagina), avem

$$\int\limits_a^\infty f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^\infty f_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty f_n.$$

Reciproc, presupunem că mulţimea $\{\int\limits_a^\infty f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită şi fie

$$S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^\infty f_n.$$

Pentru $c > a$, avem, conform cu teorema de convergenţă monotonă,

$$\int\limits_a^c f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^c f_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c f_n.$$

Deoarece $f_n \geq 0$, deducem că pentru orice $c > a$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\int\limits_a^c f_n \leq \int\limits_a^\infty f_n \leq S,$$

de unde, cum $\int\limits_a^c f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^c f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^c f_n$ (vezi teorema de convergenţă monotonă de la pagina 402), prin trecere la limită după n tinzând la ∞, ducem că

$$\int\limits_a^c f \leq S.$$

Atunci, în conformitate cu teorema de la pagina 461, $\int\limits_a^\infty f$ există şi

$$\int\limits_a^\infty f = \sup_c \int\limits_a^c f = \sup_c \{\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^c f_n\} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\sup_c \int\limits_a^c f_n\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^\infty f_n. \ \square$$

REZUMAT

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $x \in [a,\infty)$, există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$. Prespunem că pentru orice $c \in (a,\infty)$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, f şi f_n sunt integrabile Riemann pe $[a,c]$ şi că există o funcţie $M : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, pentru care există $\int\limits_a^\infty M$, astfel ca $|f_n(x)| \leq M(x)$, pentru orice $x \in [a,\infty)$ şi orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $\int\limits_a^\infty f$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty f_n = \int\limits_a^\infty f$.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit şi crescător de funcţii, $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Prespunem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $\int\limits_a^\infty f_n$. Fie pentru orice $x \in [a,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$. Atunci există $\int\limits_a^\infty f$ dacă şi numai dacă mulţimea $\{\int\limits_a^\infty f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită. În acest caz $\int\limits_a^\infty f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_a^\infty f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty f_n$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRALE IMPROPRII (INFINITE) ITERATE

În teorema de schimbare a ordinii de integrare am obţinut un rezultat care permite permutarea ordinii de integrare pe o mulţime de tipul $\{(x,t) \mid x \in [a,\infty),\, t \in [\alpha,\beta]\}$. Este de asemenea de dorit să putem schimba ordinea de integrare pentru integrale infinite iterate, adică să stabilim în ce ipoteze avem egalitatea

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\int_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt = \int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx.$$

Teoremă. *Fie* $f : [a,\infty) \times [\alpha,\infty) \to [0,\infty)$, *unde* $a, \alpha \in \mathbb{R}$.
Să presupunem că

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\int_{a}^{b} f(x,t)dx)dt = \int_{a}^{b}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx, \qquad (*)$$

pentru orice $b \geq a$ *şi că*

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\int_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt = \int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt)dx, \qquad (**)$$

pentru orice $\beta \geq \alpha$.
În aceste condiţii, dacă una dintre integralele iterate

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\int_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt,$$

$$\int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$$

există, atunci există şi cealaltă şi sunt egale.

Demonstraţie. Să presupunem că există $\int\limits_{\alpha}^{\infty}(\int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt$.

Deoarece f este pozitivă avem

$$\int_a^b f(x,t)dx \leq \int_a^\infty f(x,t)dx,$$

pentru orice $b \geq a$ şi orice $t \in [\alpha, \infty)$.

Prin urmare

$$\int_\alpha^\infty (\int_a^b f(x,t)dx)dt \leq \int_\alpha^\infty (\int_a^\infty f(x,t)dx)dt,$$

de unde folosind (*), avem

$$\int_a^b (\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx \leq \int_\alpha^\infty \{\int_a^\infty f(x,t)dx\}dt,$$

pentru orice $b \geq a$.

Folosind un rezultat anterior (vezi teorema de la pagina 461), deducem că există $\int_a^\infty (\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx$ şi că

$$\int_a^\infty (\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx \leq \int_\alpha^\infty \{\int_a^\infty f(x,t)dx\}dt.$$

Similar se obţine inegalitatea inversă de unde concluzia. $\square$

Teoremă. *Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă.*

Să presupunem că funcţiile $M : [a, \infty) \to [0, \infty)$ şi $N : [a, \infty) \to [0, \infty)$ au proprietatea că există $\int_a^\infty M$ şi $\int_\alpha^\infty N$.

Dacă, pentru orice $(x, t) \in [a, \infty) \times [\alpha, \infty)$, avem

$$|f(x,t)| \leq M(x)N(t),$$

atunci integralele iterate

$$\int_\alpha^\infty (\int_a^\infty f(x,t)dx)dt$$

şi

$$\int_a^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$$

există şi sunt egale.

Demonstraţie. Deoarece N este mărginită pe orice interval $[\alpha, \beta]$, folosind Criteriul lui Weierstrass (vezi pagina 468), deducem că integrala

$$\int_a^{\infty} f(x,t)dx$$

există uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Atunci, teoremei de la pagina 472, avem

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\int_a^{\infty} f(x,t)dx)dt = \int_a^{\infty}(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt)dx,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$,

Similar

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\int_a^{b} f(x,t)dx)dt = \int_a^{b}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx,$$

pentru orice $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Pentru a încheia demonstraţia se apelează la criteriul de comparaţie (vezi pagina 461) pentru a justifica existenţa integralelor $\int_{\alpha}^{\infty}(\int_a^{\infty} f(x,t)dx)dt$ şi $\int_a^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$ şi la teorema anterioară pentru a justifica egalitatea lor. $\square$

Rezultatele precedente au vizat cazul în care integralele iterate sunt absolut convergente, în timp ce următorul tratează cazul convergenţei neabsolute. El este util în rezolvarea exerciţiilor 1 şi 2 din acest capitol.

Teoremă. *Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă.*

Să presupunem că integralele infinite $\int_a^{\infty} f(x,t)dx$ şi $\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt$ converg uniform în raport cu $t \in [\alpha, \infty)$, respectiv $x \in [a, \infty)$.

În plus, dacă definim, pentru orice $x \in [a,\infty)$ *şi* $t \in [\alpha,\infty)$,

$$F(x,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt,$$

să *presupunem că integrala*

$$\int_{a}^{\infty} F(x,\beta)dx$$

converge uniform în raport cu $\beta \in [\alpha,\infty)$.

Atunci integralele $\int_{\alpha}^{\infty}(\int_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt$ *şi* $\int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$ *există, şi*

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\int_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt = \int_{a}^{\infty}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx.$$

Demonstraţie. Deoarece integrala

$$\int_{a}^{\infty} F(x,\beta)dx$$

converge uniform în raport cu $\beta \in [\alpha,\infty)$, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $A_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru $A \geq A_{\varepsilon}$, avem

$$\left| \int_{a}^{A} F(x,\beta)dx - \int_{a}^{\infty} F(x,\beta)dx \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

pentru orice $\beta \geq \alpha$.

Să observăm că

$$\int_{a}^{A} F(x,\beta)dx = \int_{a}^{A}(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(\int_{a}^{A} f(x,t)dt)dx.$$

Atunci, din convergenţa uniformă a integralei $\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt$ în raport cu $x \in [a,\infty)$, deducem că

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{a}^{A} F(x,\beta)dx = \int_{a}^{A}(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx.$$

Drept urmare, există $B \geq \alpha$, astfel ca pentru $\beta_1 \geq \beta_2 \geq B$, să avem

$$\left| \int_a^A F(x, \beta_2) dx - \int_a^A F(x, \beta_1) dx \right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), deducem că, pentru $\beta_1 \geq \beta_2 \geq B$, avem

$$\left| \int_a^\infty F(x, \beta_2) dx - \int_a^\infty F(x, \beta_1) dx \right| < 3\varepsilon,$$

deci există $\lim\limits_{\beta \to \infty} \int\limits_a^\infty F(x, \beta) dx$.

Avem, folosind teorema de la pagina 472,

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x,t) dx \right) dt = \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x,t) dt \right) dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\infty F(x, \beta) dx,$$

deci există

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t) dx \right) dt.$$

Trecând la limită după β tinzând către ∞, în (1), deducem că

$$\left| \int_\alpha^A \left(\int_a^\infty f(x,t) dt \right) dx - \int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t) dx \right) dt \right| \leq \varepsilon,$$

de unde, prin trecere la limită după A tinzând către ∞, se deduce concluzia.
□

Exerciţii

1. Să se arate că

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+t)} \sin(xt) dx \right) dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+t)} \sin(xt) dt \right) dx.$$

2. Să se arate că, pentru $a>0$ şi $\alpha>0$,

$$\int_\alpha^\infty\Big(\int_a^\infty e^{-xt}dx\Big)dt=\int_a^\infty\Big(\int_\alpha^\infty e^{-xt}dt\Big)dx.$$

3. Să se arate că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

REZUMAT

Fie $f:[a,\infty)\times[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}_+$**, unde** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**. Se presupune că** $\int_\alpha^\infty(\int_a^b f(x,t)dx)dt=\int_a^b(\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx$**, pentru orice** $b\geq a$ **şi că** $\int_\alpha^\beta(\int_a^\infty f(x,t)dx)dt=\int_a^\infty(\int_\alpha^\beta f(x,t)dt)dx$**, pentru orice** $\alpha\geq\beta$**. Dacă integrala iterată** $\int_\alpha^\infty(\int_a^\infty |f(x,t)|\,dx)dt$ **există, atunci integralele iterate** $\int_\alpha^\infty(\int_a^\infty f(x,t)dx)dt$, $\int_a^\infty(\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx$ **există şi sunt egale.**

Fie $f:[a,\infty)\times[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}_+$**, unde** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**. Se presupune că** $\int_\alpha^\infty(\int_a^b f(x,t)dx)dt=\int_a^b(\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx$**, pentru orice** $b\geq a$ **şi că** $\int_\alpha^\beta(\int_a^\infty f(x,t)dx)dt=\int_a^\infty(\int_\alpha^\beta f(x,t)dt)dx$**, pentru orice** $\alpha\geq\beta$**. Dacă integrala iterată** $\int_\alpha^\infty(\int_a^\infty |f(x,t)|\,dx)dt$ **există, atunci integralele iterate** $\int_\alpha^\infty(\int_a^\infty f(x,t)dx)dt$, $\int_a^\infty(\int_\alpha^\infty f(x,t)dt)dx$ **există şi sunt egale.**

Fie $f:[a,\infty)\times[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$**, unde** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**, o funcţie continuă. Se presupune că există funcţiile** $M:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$ **şi** $N:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$ **pentru care există** $\int_a^\infty M$ ***şi*** $\int_\alpha^\infty N$**. Dacă, pentru orice** $(x,t)\in[a,\infty)\times[\alpha,\infty)$**,**

avem $|f(x,t)| \leq M(x)N(t)$**, atunci integralele iterate** $\int\limits_{\alpha}^{\infty}(\int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt$ **şi** $\int\limits_{a}^{\infty}(\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$ **există şi sunt egale.**

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\infty) \to \mathbb{R}$**, unde** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$**, o funcţie continuă. Se presupune că integralele infinite** $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)dx$ **şi** $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt$ **converg uniform în raport cu** $t \in [\alpha,\infty)$**, respectiv** $x \in [a,\infty)$**. În plus, dacă definim, pentru orice** $x \in [a,\infty)$ **şi** $t \in [\alpha,\infty)$**,** $F(x,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$**, presupunem că integrala** $\int\limits_{a}^{\infty} F(x,\beta)dx$ **converge uniform în raport cu** $\beta \in [\alpha,\infty)$**. Atunci** $\int\limits_{\alpha}^{\infty}(\int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)dx)dt = \int\limits_{a}^{\infty}(\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x,t)dt)dx$**.**

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

FUNCŢIILE GAMA ŞI BETA

Funcţia Gama
Funcţia Beta
Legătura dintre funcţiile Gama şi Beta

Funcţia Gama (introdusă şi studiată de către Euler în anii 1730) reprezintă o generalizare a conceptului de factorial la numere reale (şi, aşa cum se poate constata după parcurgerea cursului de funcţii complexe, la numere complexe). Ea constituie o prezenţă consistentă în cadrul teoriei probabilităţilor, statisticii şi combinatoricii. În strânsă legătură cu funcţia Gama este funcţia Beta.

Funcţia Gama

Funcţia $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *dată de*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$*, se numeşte funcţia Gama.*

Această funcţie are următoarele proprietăţi:

a)

$$\Gamma(1) = 1;$$

b)

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi};$$

c)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$*; în particular, avem*

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*;*

d)

$$\Gamma(2x) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2x-1} \Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2});$$

e)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\Gamma(x) = 1;$$

prin urmare funcţia Γ *nu este mărginită.*

f)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a\Gamma(x)} = 1,$$

pentru orice $a \in (0,\infty)$*;*

g) Γ *este o funcţie convexă de clasă* $\mathcal{C}^\infty$*.*

Funcţia Beta

Funcţia $B : (0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ *dată de*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$*, se numeşte funcţia Beta.*

Această funcţie are următoarele proprietăţi:

a)

$$B(x,y) = B(y,x),$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$*;*

b)

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt,$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$*;*

c)

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du,$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$*.*

Legătura dintre funcţiile Gama şi Beta

Legătura dintre cele două funcţii este dată de formula

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

Observaţie. *Cititorul interesat poate afla detalii privind cele două funcţii consultând următoarele lucrări:*

E. Artin, **The Gamma Function**, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1964.

Philip J. Davis, **Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function**, The American Mathematical Monthly, 66 (10), 1959, 849-869.

O. Stănăşilă, **Analiză Matematică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

G.E. Şilov, **Analiză Matematică**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

Exerciţii

1. Să se arate că

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}}\Gamma(\frac{m+1}{2}),$$

unde $a\in(0,\infty)$ şi $m\in(-1,\infty)$.

2. Să se arate că

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

pentru orice $x\in(0,1)$.

3. Să se arate că

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\frac{\ln 2\pi}{2}.$$

4. Să se arate că

$$2^{2x}\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)}=2\sqrt{\pi},$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$.

5. Să se arate că:

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^a(x)dx = \frac{\pi}{2\cos(\pi\frac{a}{2})},$$

unde $a \in (-1, 1)$;

ii)

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{3 - \cos x}}dx = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}(\Gamma(\frac{1}{4}))^2;$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}(x)dx = 2^{a-2}B(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}),$$

unde $a \in (0, \infty)$.

6. Să se arate că

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} (e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a})\frac{1}{x}dx.$$

7. Să se arate că

$$\lim_{x\to\infty} x^a B(a, x) = \Gamma(a),$$

unde $a \in (0, \infty)$.

FORMULA LUI de MOIVRE-STIRLING

When Newton said "If I have seen a little farther than others it is because I have stood on the shoulders of giants", one of those giants was John Wallis. ... His Arithmetica Infinitorul, published in 1655, derives the rule (found also by Fermat) for the integral of a fractional power of x: $\int\limits_0^1 x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{n+m}$. Our interest lies in one of the applications he makes of this rule, an infinite process that yields a value for π. It does not involve an infinite series but rather an infinite product. It is included because it demonstrates an audacious use of the infinite, it motivated Newton's calculation of π, and it yields a useful formula that will play an important role in estimating the size of $n!$.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina 271

An acurate approximation of $n!$ was discovered in 1730 in a collaboration between Abraham de Moivre (1667-1754) and James Stirling (1692-1770). ... One of the first things one observes about $n!$ is that it grows very fast. ... we can say with confidence that ... $n! \approx n^n e^{-n}$. To refine this approximation any further, we need to turn to infinite series. We shall follow de Moivre's original argument which he published in 1730. The reader is forewarned that it is intricate. de Moivre did not simply sit down and write this out, it is product of nine years of work, the last five of which involved the frequent sharing of ideas with James Stirling.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 294, 296 şi 297

Formula lui Wallis
Formula lui de Moivre-Stirling

Formula lui Wallis

Se poate constata uşor că

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}$$

şi că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}.$$

Prin integrarea inegalităţilor

$$(\sin x)^{2n+1} \leq (\sin x)^{2n} \leq (\sin x)^{2n-1},$$

valabile pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, folosind relaţiile de mai sus, se constată validitatea următoarei relaţii care este cunoscută sub numele de formula lui Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Notă istorică. *John Wallis* (1616 - 1703), matematician englez, a studiat la James Movat's grammar school in Tenterden, Kent, la Martin Holbeach's school in Felsted, Essex (unde învaţă latină şi greacă), la Emmanual College şi Queen's College din Cambridge. În 1649, având în vedere ajutorul acordat (prin decodarea mesajelor "regaliştilor") de către Walllis, în cadrul războiului civil, taberei susţinătorilor ideii de Parlament în detrimentul susţinătorilor Regalităţii, a fost numit, chiar de către Cromwell (care-l aprecia, nu numai datorită vederilor sale politice, ci şi datorită cunoştinţelor sale), titular al Savilian Chair of Geometry de la Oxford, în locul titularului anterior care avea simpatii "regaliste". A fost titularul acestei catedre până la sfârşitul vieţii, adică peste 50 de ani. Wallis, considerat ca fiind cel mai important matematician englez de până la Newton, a contribuit, în mod substanţial, la elaborarea bazelor analizei matematice. Cea mai cunoscută lucrare a lui Wallis (apărută în 1656), care conţine şi formula de mai sus (descoperită datorită încercărilor de a calcula $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, şi deci de a determina aria unui cerc de rază 1), se intitulează Arithmetica infinitorum. Sunt prezentate aici metode, utilizate ulterior de către Newton, pentru calculul integralelor. Wallis a fost primul care a utilizat simbolul ∞ (ales pentru că semnifică o curbă ce poate fi parcursă de o infinitate de ori).

Formula lui de Moivre-Stirling

Formula lui Stirling ne furnizează o aproximare simplă şi utilă a lui $n!$ pentru valori mari ale lui n. Ea ne precizează comportatrea asimptotică, la ∞, a lui $n!$.

Teoremă (formula lui de Moivre-Stirling)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Notă istorică. *Abraham de Moivre* (1667 - 1754), matematician francez, a studiat la Academia Protestantă din Sedan unde a studit limba greacă, precum şi la Collège de Harcourt din Paris. de Moivre fiind protestant, din cauza persecuţiilor religioase existente în Franţa la aceea vreme, va petrece o perioadă în închisoare pentru ca apoi să emigreaze în Anglia în 1688. Aici se împrieteneşte cu Halley şi Newton. Face o primă comunicare cu titlul "Method of fluxions" la Royal Society, al cărei membru devine în 1697. În 1710 de Moivre este numit ca membru al comisiei numite de Royal Society pentru a judeca disputa dintre Newton şi Leibniz cu privire la prioritatea inventării bazelor calculului diferenţial şi integral. de Moivre a contribuit la dezvoltarea geometriei analitice, teoriei probabilităţilor (a publicat, în 1718, o lucrare de referinţă în acest domeniu, intitulată "The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play", reeditată în 1738 şi 1756) şi a statisticii (a publicat, în 1724, o lucrare cu titlul "Annuities on lives"). În lucrarea sa "Miscellanea Analytica", apărută în 1730, se găseşte aşa numita formulă a lui Stirling (atribuită în mod eronat lui Stirling). În cea de a doua ediţie a acestei cărţi, apărută în 1738, de Moivre menţionează contribuţia lui Stirling la îmbunătăţirea formulei. A avut contribuţii însemnate la dezvoltarea teoriei numerelor complexe. A fost ales membru al Academiei de Ştiinţe din Paris în 1754. Deşi, având în vedere meritele sale ştiinţifice incontestabile, de Moivre a primit sprijin din partea lui Leibniz, Newton şi Halley pentru a obţine o catedră universitară, acest lucru nu s-a realizat, venitul său principal provenind din lecţii particulare şi murind în sărăcie.

Notă istorică. *James Stirling* (1692 - 1770), matematician scoţian, a studiat la Oxford, Padova şi Veneţia şi a condus Compania Minieră Scoţiană. Opera sa principală o constituie tratatul (publicat în 1730) intitulat Methodus Differentialis, tratat care conţine şi celebra formulă care-i poartă numele,

precum şi chestiuni legate de funcţia Gama. O altă contribuţie însemnată a lui Stirling o constituie memoriul intitulat "Twelve propositions concerning the figure of the Earth", susţinut în anul 1735 la Royal Society şi a cărui variantă extinsă a apărut sub numele "Of the figure of the Earth, and the variation of gravity on the surface", în anul 1735. A purtat corespondenţe cu mari matematicieni ai vremii, precum Newton, De Moivre, Maclaurin şi Euler. La propunerea prietenului său Newton, a fost ales membru al Royal Society of London. A fost de asemenea membru al Academiei Regale din Berlin.

Vom începe prin a demonstra următoarele două leme.

Lema 1. *Pentru orice $p, x \in (0, \infty)$, are loc inegalitatea*

$$e^x < (1 + \frac{x}{p})^{p + \frac{x}{2}}.$$

În particular, pentru $x = 1$, obţinem că

$$e < (1 + \frac{1}{n})^{n + \frac{1}{2}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Inegalitatea considerată este echivalentă cu

$$0 < (p + \frac{x}{2}) \ln(1 + \frac{x}{p}) - x.$$

Pentru $x \in (0, \infty)$, să considerăm funcţia $f_x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de

$$f_x(p) = (p + \frac{x}{2}) \ln(1 + \frac{x}{p}) - x,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$.

Inegalitatea considerată se scrie sub forma

$$0 < f_x(p),$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$.

Deoarece

$$f_x^{'}(p) = \ln(\frac{p + x}{p}) - \frac{x}{p} \frac{p + \frac{x}{2}}{p + x}$$

şi

$$f_x^{''}(p) = \frac{x^3}{2p^2(p+x)^2} > 0,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$, deducem că $f_x^{'}$ este crescătoare, deci

$$f_x^{'}(p) < \lim_{p \to \infty} f_x^{'}(p) = 0,$$

ceea ce arată că f_x este descrescătoare şi ca atare avem

$$f_x(p) > \lim_{p \to \infty} f_x(p) = 0,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$, i.e. concluzia.

Lema 2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea*

$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

Demonstraţie. Să considerăm funcţiile $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ date de

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{2}{2x+1}$$

şi

$$g(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{2x+1}{2x(x+1)},$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Se constată uşor că

$$f^{'}(x) = -\frac{1}{4x(x+1)(2x+1)^2} < 0$$

şi

$$g^{'}(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2} < 0,$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Aşadar f şi g sunt descrescătoare pe $[1, \infty)$ şi prin urmare

$$f(x) \leq f(1) = \ln 2 - \frac{2}{3} < 0$$

şi

$$g(x) > \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$f(n) < 0 < g(n),$$

ceea ce echivalează cu concluzia.

Observaţie. *Anterior, în cadrul prezentului curs (vezi pagina), am stabilit că inegalitatea*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Lema 2 este o întărire a acestui rezultat deoarece media armonică a numerelor $\frac{1}{n}$ şi $\frac{1}{n+1}$ este $\frac{2}{2n+1}$, iar media aritmetică a lor este $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

Acum putem începe *demonstraţia formulei lui Stirling.*

Cu notaţia

$$x_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}},$$

avem, conform lemei 1,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e} > 1, \tag{*}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că şirul $(x_n)_n$ este descrescător.

Cum el este minorat de 0, deducem că este convergent, deci există $l \in [0, \infty)$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Vom arăta că

$$l > 0.$$

Prin logaritmare, folosind $(*)$, obţinem

$$\ln x_n - \ln x_{n+1} = (n + \frac{1}{2})[\ln(n+1) - \ln n] - 1,$$

de unde, conform lemei 2, avem

$$0 < \ln x_n - \ln x_{n+1} < (n+\frac{1}{2})\frac{2n+1}{2n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, prin adunarea inegalităţilor de tipul celei de mai sus scrise succesiv pentru indicii $n, n+1, ..., n+k-1$, obţinem

$$0 < \ln x_n - \ln x_{n+k} < \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}),$$

i.e.

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})},$$

adică

$$e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n})} < \frac{x_{n+k}}{x_n} < 1.$$

Prin trecere la limită, după k tinzând la ∞, în inegalitatea anterioară, obţinem

$$e^{-\frac{1}{4n}} \leq \frac{l}{x_n},$$

deci

$$l \neq 0.$$

Acum să observăm că

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}},$$

de unde

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin trecere la limită în relaţia de mai sus, având în vedere formula lui Wallis, deducem că

$$l = \sqrt{2\pi},$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Observaţie. *Formula lui Stirling se poate generaliza sub următoarea formă*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}} = \sqrt{2\pi}.$$

Detalii se pot găsi în *Gerald B. Folland*, **Advanced Calculus**, Prentice Hall, 2002, paginile 350-353.

Exerciţii

1. Să se arate că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+1)} = 1.$$

Bibliografie

1. *Gerald B. Folland*, **Advanced Calculus**, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2002.

2. *Andrei Vernescu*, **Numărul** e **şi Matematica Exponenţialei**, Editura Universităţii din Bucureşti, 2004 - cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

FUNCŢII CU VARIAŢIE MĂRGINITĂ

O funcţie reală $f(t)$, definită pe $[a,b]$, este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$, dacă există un număr K, astfel încât, oricare ar fi diviziunea $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_n = b)$, avem $v(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq K$ (*). Pentru a înţelege sensul intuitiv al acestei noţiuni, este suficient să observăm semnificaţia expresiei lui $v(\Delta)$. Numărul $v(\Delta)$ însumează toate modificările pe care le suferă funcţia pe parcursul de la a la b, dacă se face abstracţie de valorile pe care le ia în interiorul intervalelor care alcătuiesc diviziunea Δ. Este clar atunci că pentru a avea o măsură cât mai bună a modificărilor pe care valorile funcţiei le suferă între a şi b este indicat să îndesim cât mai mult punctele diviziunii Δ. Cum numărul $v(\Delta)$ nu scade atunci când adăugăm noi puncte diviziunii Δ, este natural să se îndrepte atenţia asupra celui mai mic număr K cu proprietatea (*). Acest număr va da cea mai bună măsură a modificărilor pe care funcţia $f(t)$ le suferă pe segmentul $[a,b]$.

Solomon Marcus, Noţiuni de analiză matematică, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967, paginile 83 şi 84

Noţiunea de funcţie cu variaţie mărginită
Clase de funcţii cu variaţie mărginită
Caracterizarea alternativă a funcţiilor cu variaţie mărginită
Calculul variaţiei totale a unei funcţii derivabile cu derivata continuă

Noţiunea de funcţie cu variaţie mărginită

Definiţie. *Pentru o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ şi $P = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ o partiţie a lui $[a,b]$, definim variaţia lui f corespunzătoare lui P, notată cu $V_P(f)$, ca fiind*

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| .$$

Dacă mulţimea $\{V_P(f) \mid P$ este o partiţie a lui $[a,b]\}$ este mărginită, atunci spunem că f este cu variaţie mărginită şi în acest caz numărul real pozitiv

$$\sup\{V_P(f) \mid P \text{ este o partiţie a lui } [a,b]\}$$

se notează cu $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ *şi se numeşte variaţia totală a lui* f *pe* $[a,b]$.

Observaţie. *O funcţie continuă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ *se numeşte drum, iar imaginea sa se numeşte suportul drumului considerat. Deoarece* $V_P(f)$ *reprezintă lungimea liniei poligonale determinate de punctele* $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$, *este natural să spunem că suportul drumului* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ *are lungime (este rectificabil) dacă* $\sup\{V_P(f) \mid P$ *este o partiţie a lui* $[a,b]\}$ *este finit şi să-l numim lungimea suportului drumului* f. *Aşadar suportul drumului* f *are lungime (este rectificabil) dacă şi numai dacă* f *este cu variaţie mărginită şi în acest caz lungimea suportului drumului* f *este egală cu* $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

Pentru o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, *dată de* $F(x) = (x, f(x))$, *pentru orice* $x \in [a,b]$, *este cu variaţie mărginită, vom numi lungimea graficului lui* f *variaţia totală a funcţiei* F.

Rezultatul următor arată că studiul funcţiilor cu variaţie mărginită se poate reduce la studiul cazului în care funcţia este cu valori în $\mathbb{R}$.

Propoziţie. O *funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$, *având componentele* $f_1, ..., f_p$, *este cu variaţie mărginită dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1, ..., f_p$ *sunt cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie. Deoarece pentru orice partiţie $P = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a,b]$, avem

$$|f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})| \leq \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{i=1}^{p} |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})|,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$ şi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})|,$$

i.e.

$$V_P(f_i) \leq V_P(f) \leq \sum_{i=1}^{p} V_P(f_i),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Rezultatul următor dovedeşte că proprietatea de a fi cu variaţie mărginită se păstrează prin restricţionarea funcţiei la un subinterval al intervalului iniţial.

Propoziţie. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ o *funcţie cu variaţie mărginită şi* $[c, d] \subseteq [a, b]$. *Atunci* $f_{|[c,d]}$ *este cu variaţie mărginită şi*

$$\overset{d}{\underset{c}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Demonstraţie. Dacă $P = (c = x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = d)$ este o partiţie arbitrară a lui $[c, d]$, atunci $Q = (a = x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = b)$ este o partiţie a lui $[a, b]$ şi avem

$$V_P(f) = \sum_{k=2}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| = V_Q(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

de unde $f_{|[c,d]}$ este cu variaţie mărginită şi

$$\overset{d}{\underset{c}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Corolar. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ o *funcţie cu variaţie mărginită. Atunci funcţia* $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ *este crescătoare.*

Rezultatul de mai jos arată familia funcţiilor cu variaţie mărginită constituie o subclasă a funcţiilor mărginite.

Propoziţie. *O funcţie cu variaţie mărginită* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ *este mărginită.*

Demonstraţie. Pentru $x \in [a, b]$, P_x fiind partiţia lui $[a, x]$ formată numai din capetele acestui interval, avem

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a)\| = V_{P_x}(f) + \|f(a)\| \leq$$

$$\leq \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + \|f(a)\| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \|f(a)\|,$$

ceea ce arată că f este mărginită.

Rezultatul de mai jos semnalează aditivitatea de domeniu a variaţiei totale.

Propoziţie. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ o *funcţie cu variaţie mărginită şi* $c \in [a,b]$. Atunci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Demonstraţie. Fie $P = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ este o partiţie arbitrară a lui $[a,b]$.

Atunci există $j \in \{1,2,...,n\}$ astfel încât

$$c \in [x_{j-1}, x_j].$$

Să considerăm $P_c = (a = x_0, x_1, ..., x_{j-1}, c, x_j, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ partiţie a lui $[a,b]$, $P^{'} = (a = x_0, x_1, ..., x_{j-1}, c)$ partiţie a lui $[a,c]$ şi $P^{''} = (c, x_j, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ partiţie a lui $[c,b]$.

Avem

$$V_P(f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(x_j) - f(c)\| + \|f(c) - f(x_{j-1})\| =$$

$$= [\sum_{k=1}^{j-1} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(c) - f(x_{j-1})\|]+$$

$$+[\|f(x_j) - f(c)\| + \sum_{k=j+1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|] =$$

$$= V_{P'}(f) + V_{P''}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

de unde

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{*}$$

Să considerăm $P_1 = (a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = c)$ o partiţie arbitrară a lui $[a, c]$ şi $P_2 = (c = s_0, s_1, ..., s_{m-1}, s_m = b)$ o partiţie arbitrară a lui $[c, b]$.

Fie $P^* = (a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n, s_1, ..., s_{m-1}, s_m = b)$ partiţia lui $[a, b]$ formată din puntele lui P_1 şi P_2.

Atunci

$$V_{P_1}(f) + V_{P_2}(f) = V_{P^*}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

de unde

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \tag{**}$$

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă că

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Clase de funcţii cu variaţie mărginită

Propoziţie. *O funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este cu variaţie mărginită şi*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Demonstraţie. Fără pierderea generalităţii, putem presupune că f este crescătoare.

Atunci, pentru orice partiţie $P = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a, b]$, avem

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a),$$

de unde deducem că f este cu variaţie mărginită şi

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Propoziţie. *O funcţie Lipschitz $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ este cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie. Deoarece f este Lipschitz, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in [a, b]$.

Atunci, pentru orice partiţie $P = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a, b]$, avem

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n} M\,|x_k - x_{k-1}| = M(b-a),$$

de unde deducem că f este cu variaţie mărginită.

Corolar. *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi cu derivata mărginită este cu variaţie mărginită.*

Propoziţie. *Pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este constantă;

ii) f este cu variaţie mărginită şi $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$.

Demonstraţie. Implicaţia $i) \Rightarrow ii)$ este imediată.

Pentru implicţia $ii) \Rightarrow i)$ să considerăm, pentru $x \in [a, b]$, P_x partiţia lui $[a, b]$ dată de punctele a, x şi b.

Avem

$$0 \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(b) - f(x)\| = V_{P_x}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0,$$

de unde

$$f(x) = f(a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, deci f este constantă.

Caracterizarea alternativă a funcţiilor cu variaţie mărginită

Rezultatul următor precizează structura funcţiilor cu variaţie mărginită.

Teorema lui Jordan. *Pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este cu variaţie mărginită;

ii) există două funcţii crescătoare $f_1, f_2 : [a, b] \to [0, \infty)$ astfel încât

$$f = f_1 - f_2.$$

Demonstraţie.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Aşa cum am văzut, funcţia $f_1 : [a, b] \to [0, \infty)$ dată de

$$f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ este crescătoare.

Fie

$$f_2 = f_1 - f.$$

Vom arăta că f_2 este crescătoare.

Într-adevăr, pentru $a \leq x < y \leq b$, avem

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) = f_1(y) - f_1(x),$$

de unde

$$f_1(x) - f(x) \leq f_1(y) - f(y),$$

i.e.

$$f_2(x) \leq f_2(y).$$

Înlocuind pe f_1 şi f_2 cu $f_1 + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_1(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_2(x)|$, respectiv cu $f_2 + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_1(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_2(x)|$ demonstraţia acestei implicaţii este încheiată.

Implicaţia *i)* $\Rightarrow$ *ii)* decurge imediat din faptul că funcţiile f_1 şi f_2, fiind monotone, sunt cu variaţie mărginită.

Corolar. *Eventualele discontinuităţi ale unei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ care este cu variaţie mărginită sunt de prima speţă.*

Corolar. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă şi g este cu variaţie mărginită, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g. Dacă f este cu variaţie mărginită şi g este continuă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g.*

Observaţie. *În cadrul cursului de funcţii complexe se va utiliza integrala complexă (sau integrala Cauchy) care este o integrală Riemann-Stieltjes a unei funcţii continue în raport cu o funcţie cu variaţie mărginită (* a se vedea *P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu,* **Analiză Matematică (Funcţii complexe)**, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1982, pagina 50*).*

Calculul variaţiei totale a unei funcţii derivabile cu derivata continuă

În cele ce urmează vom prezenta o exprimare integrală a variaţiei totale a unei funcţii derivabile cu derivata continuă.

Lemă. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}^p$ o funcţie cu variaţie mărginită. Atunci există un şir $(P_n)_n$ de partiţii ale lui $[a,b]$ astfel ca:*

i)

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0;$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty}V_{P_n}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Demonstraţie. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există o partiţie $P_n^{'}$ a lui $[a,b]$ astfel ca

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\frac{1}{n}<V_{P_n^{'}}(f).$$

Dacă vom considera o partiţie P_n a lui $[a,b]$ care să constituie o rafinare a lui $P_n^{'}$ şi care să aibă norma mai mică decât $\frac{1}{n}$, atunci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\frac{1}{n}<V_{P_n^{'}}(f)\leq V_{P_n}(f)\leq\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

şi

$$\|P_n\|<\frac{1}{n},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, de unde obţinem concluzia.

Teoremă. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}^p$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă. Atunci*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\int_a^b\left\|f^{'}\right\|=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(f_i^{\prime})^2},$$

unde $f=(f_1,f_2,...,f_p)$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$.

Deoarece f este derivabilă şi cu derivata continuă, ea este integrabilă, deci există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice partiţie P a lui $[a,b]$ cu norma inferioară lui δ_ε să avem

$$\left| S(P, \left\| f' \right\|) - \int_a^b \left\| f' \right\| \right| < \varepsilon.$$

Deoarece funcţiile $f_1', f_2', ..., f_p'$ sunt continue, iar $[a,b]$ este un interval compact, ele sunt uniform continue, deci există $\delta_\varepsilon' > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in [a,b]$ astfel ca $|x-y| < \delta_\varepsilon'$ şi orice $j \in \{1,2,...,p\}$, avem

$$\left| f_j'(x) - f_j'(y) \right| < \varepsilon. \tag{0}$$

Având în vedere lema de mai sus, există $n \in \mathbb{N}$ şi o partiţie

$$P_n = (a = x_0^n, x_1^n, ..., x_{m_n}^n = b)$$

a lui $[a,b]$, astfel ca

$$\left| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - V_{P_n}(f) \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

şi

$$\|P_n\| < \min\{\delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon\}, \tag{*}$$

de unde

$$\left| S(P_n, \left\| f' \right\|) - \int_a^b \left\| f' \right\| \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Conform teoremei lui Lagrange, pentru orice $j \in \{1,2,...,p\}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{1,2,...,m_n\}$, există $\xi_{j,n,k} \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ astfel încât

$$f_j(x_k^n) - f_j(x_{k-1}^n) = (x_k^n - x_{k-1}^n) f_j'(\xi_{j,n,k}),$$

deci

$$V_{P_n}(f) = \sum_{k=1}^{m_n} \left\| f(x_k^n) - f(x_{k-1}^n) \right\| = \sum_{k=1}^{m_n} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (f_j(x_k^n) - f_j(x_{k-1}^n))^2} =$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(x_k^n-x_{k-1}^n)^2(f_j'(\xi_{j,n,k}))^2}=\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{j,n,k}))^2},$$

de unde

$$\left|V_{P_n}(f)-S(P_n,\left\|f'\right\|)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{j,n,k}))^2}-\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{n,k}))^2}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)[\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{j,n,k}))^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{n,k}))^2}]\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)\left|\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{j,n,k}))^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j'(\xi_{n,k}))^2}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m_n}(x_k^n-x_{k-1}^n)[\sum_{j=1}^{p}\left|f_j'(\xi_{j,n,k})-f_j'(\xi_{n,k})\right|].\qquad(**)$$

unde $\xi_{n,1},\xi_{n,2},...,\xi_{n,m_n}$ constituie un sistem de puncte intermediare arbitrare pentru partiţia P_n.

Am folosit mai sus inegalitatea

$$|\|u\|-\|v\||\leq\|u-v\|\leq\sum_{j=1}^{p}|u_j-v_j|,$$

valabilă pentru orice $u=(u_1,u_2,...,u_p)$ şi $v=(v_1,v_2,...,v_p)$ vectori din $\mathbb{R}^p$.

Să remarcăm că $\xi_{n,k}\in[x_{k-1}^n,x_k^n]$, ceea ce ne asigură că

$$\left|\xi_{j,n,k}-\xi_{n,k}\right|\leq\|P_n\|<\delta_\varepsilon',$$

de unde, folosind (0), avem

$$\left|f_j'(\xi_{j,n,k})-f_j'(\xi_{n,k})\right|<\varepsilon,$$

pentru orice $j\in\{1,2,...,p\}$, deci, folosind $(**)$, obţinem

$$\left|V_{P_n}(f)-S(P_n,\left\|f'\right\|)\right|\leq p(b-a)\varepsilon.\qquad(3)$$

Atunci, din $(1), (2)$ şi (3), deducem că

$$\left| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - \int_a^b \left\| f' \right\| \right| \leq$$

$$\leq \left| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - V_{P_n}(f) \right| + \left| V_{P_n}(f) - S(P_n, \left\| f' \right\|) \right| + \left| S(P_n, \left\| f' \right\|) - \int_a^b \left\| f' \right\| \right| <$$

$$< \varepsilon(2 + p(b-a)),$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

În concluzie

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b \left\| f' \right\| .$$

Corolar. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă. Atunci lungimea graficului lui f este egală cu*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Exerciţii.

1. Să se arate că funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{dacă } x = r_n \end{array} ,$$

unde $1 = r_1, r_2, ..., r_n, ...$ reprezintă şirul numerelor raţionale din $[0, 1]$, este cu variaţie mărginită.

Să se arate că funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$g(x) = \{ \begin{array}{cc} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{array}$$

este mărginită, dar nu este cu variaţie mărginită.

Să se arate că funcţia $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este cu variaţie mărginită.

Să se arate că funcţia $h \circ f$ nu este cu variaţie mărginită.

2. Să se arate că funcţia $f : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

este continuă, nu este derivabilă şi nu este cu variaţie mărginită.

3. Să se arate că funcţia $f : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

este derivabilă şi nu este cu variaţie mărginită.

4. Să se stabilească dacă funcţiile de mai jos sunt cu variaţie mărginită şi, în caz afirmativ, să se calculeze variaţia totală:

i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x^2, & \text{dacă } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases};$$

ii) $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in [0,3) \\ 7, & \text{dacă } x = 3 \\ x^2 + 3, & \text{dacă } x \in (3,6] \end{cases};$$

iii) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 3x, & \text{dacă } x \in [1,2] \end{cases};$$

iv) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = x \cos x - \sin x,$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$.

5. Să se arate că şirul de funcţii cu variaţie mărginită $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, unde

$$f_n(x) = \{ \begin{array}{cc} 0, & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{array}$$

converge uniform către funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, unde

$$f(x) = \{ \begin{array}{cc} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{array}$$

care nu este cu variaţie mărginită.

6. Să se arate că dacă $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi $(g_n)_n$, unde $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, este un şir de funcţii cu variaţie egal mărginită (i.e. $\sup\limits_n \overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n)$ este finit) care converge către funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg = \int_a^b f d(\lim_{n\to\infty} g_n).$$

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, cota la biblioteca Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti II 32023

2. *Gh. Sireţchi*, **Capitole de Analiză Matematică, Funcţii cu variaţie mărginită; Integrala Riemann-Stieltjes**, Editura Universităţii din Bucureşsti, 2001

SERII DE FUNCŢII

GENERALIŢI PRIVIND SERIILE DE FUNCŢII

Few mathematical feats have been as surprising as the exhibition of a function that is continuous at every differentiable at none. It illustrates that confusion between continuity and differentiability is indeed confusion. While differentiability implies continuity, continuity guarrantees nothing about differentiability.

Until well into the 1880's, there was a basic belief that all functions have derivatives, except possibly at a few isolated points such as one finds with the absolute value function, $|x|$, at $x = 0$. In 1806, Ampère tried to provide the general existence of derivatives. His proof is difficult to evaluate because it is not clear what implicit assumptions he was making about what constitutes a function. In 1839 with the publication of J. L. Raabe's calculus text, Die Differential- und Integralrechnung, the "theorem" that any continuous function is differentiable - with the possibility of at most finitely many exceptions - started making its way into the standard textbooks.

Bolzano, Weierstrass and Riemann knew it was wrong. By 1861 Riemann had introduced into lectures the function $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$, claiming that it is continuous at every x but not differrentiable for infinitely many values of x. The convergence of this series is uniform (by the Weierstrass M-test with $M_n = \frac{1}{n^2}$), and so it is continuous at every x. Nondifferentiability is harder to provide. It was not until 1916 that G. H. Hardy showed that in any finite interval, no matter how short, there will be infitely many values of x for which the derivative does not exist. It was demonstrated in 1970 that there are also infinitely many values at which derivative does exist. Riemann's example - while remarkable - does not go as far as nondifferentiability for all x.

The faith in the existence of derivatives is illustrated by the reaction to Hermann Hankel's paper "Untersuchungen űber die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen" in which, among other things, he described a general method for creating continuous functions with infinitely many points of nondifferentiability. J. Hoűel applauded this result and expressed hope that it would change the current attitude in which "there is no mathematician today who would believe in the existence of continuous functions without derivatives" (as quoted in Medvedev, Scenes from the History of Real Functions). Phillipe Gilbert pounced upon errors and omissions in Hankel's work and displayed them "so as to leave no doubt ... about the inanity of the conclusions".

But the tide had turned. Hankel responded with the observation that Riemann's example of an integrable function with infinitely many discontinuities im-

plies that its integral $F(x) = \int_0^x (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((nt))}{n^2}) dt$, is necessarily continuous at every x but cannot be differentiable at any of the infinitely many points where the integrand is not continuous. The real surprise came in 1872 when Karl Weierstrass showed the Berlin Academy the trigonometric series mentioned at the end of chapter 1: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, where a is an odd integer, b lies strictly between 0 and 1, and ab is strictly larger than $1 + \frac{3\pi}{2}$. It is continuous at every value of x and differentiable at none. A flood of examples followed.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 259-260.

Noţiunea de serie de funcţii
Teoreme privind transportul de proprietăţi pentru seriile de funcţii
Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii
Un exemplu de funcţie continuă pe întreaga axa reală care nu este derivabilă în nici un punct

Noţiunea de serie de funcţii

Definiţie. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, iar şirul sumelor sale parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $S_n = f_1 + ... + f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge, pe D, către o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, spunem că seria $\sum f_n$ converge, pe D, către f.*

Dacă pentru orice $x \in D$, seria $\sum \|f_n(x)\|$ converge, spunem că seria $\sum f_n$ converge absolut pe D.

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, spunem că seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D, către f.

Teoreme privind transportul de proprietăţi pentru seriile de funcţii

Teoremă. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii continue, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, iar seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D, către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, atunci f este continuă.*

Teoremă. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii, $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Riemann-Stieltjes integrabile în raport cu $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar seria $\sum f_n$*

converge uniform către $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g şi

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \sum f_n dg = \sum \int_a^b f_n dg.$$

Teoremă. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii, $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to [0,\infty)$, Riemann-Stieltjes integrabile în raport cu $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar seria $\sum f_n$ este convergentă către $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g, atunci*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \sum f_n dg = \sum \int_a^b f_n dg.$$

Teoremă. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii derivabile, $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru care există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât seria $\sum f_n(x_0)$ este convergentă, iar seria $\sum f_n^{'}$ converge uniform, atunci există $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât seria $\sum f_n$ converge uniform către f, şi, mai mult,*

$$f^{'} = (\sum f_n)^{'} = \sum {f_n}^{'}.$$

Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii

După cum am văzut, convergenţa uniformă este esenţială în rezultatele de mai sus, deci este util să dispunem de criterii care să asigure acest tip de convergenţă.

Criteriul lui Cauchy. *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, atunci seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$\|f_n(x) + f_{n+1}(x) + ... + f_m(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$ şi orice $x \in D$.

Rezultatul de mai jos, care se poate demonstra cu ajutorul Criteriului lui Cauchy de mai sus, se va folosi în cadrul demonstraţiei teoremei privind

convergenţa uniformă a seriilor de puteri pe mulţimile compacte conţinute în interiorul intervalului de convergenţă (vezi pagina).

Criteriul lui Weierstrass. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru care există un şir de numere reale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel ca*

$$\|f_n(x)\| \leq M_n,$$

pentru orice $x \in D$ şi orice $n \in \mathbb{N}$.

Dacă seria $\sum M_n$ este convergentă, atunci seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D.

Criteriile următoare sunt utile în stabilirea convergenţei uniforme, când aceasta nu este absolută.

Criteriul lui Dirichlet. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, iar $(s_k)_k$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum f_n$.*

Presupunem că există $M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\|s_k(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$ şi orice $k \in \mathbb{N}$

Presupunem că şirul de funcţii $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\varphi_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, este descrescător şi că el converge uniform, pe D, către 0.

Atunci seria $\sum \varphi_n f_n$ converge uniform, pe D.

Criteriul lui Abel. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru care seria $\sum f_n$ converge uniform.*

Fie $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\varphi_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, un şir de funcţii monoton şi mărginit.

Atunci seria $\sum \varphi_n f_n$ converge uniform, pe D.

Un exemplu de funcţie continuă pe întreaga axa reală care nu este derivabilă în nici un punct

Fie $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia continuă, periodică de perioadă 2, definită pe $[0, 2]$ prin

$$\theta(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{array} \right. .$$

Atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \sum (\frac{3}{4})^n \theta(4^n x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este bine definită, continuă pe $\mathbb{R}$ şi nederivabilă în orice punct.

Într-adevăr, deoarece

$$\left|(\frac{3}{4})^n \theta(4^n x)\right| \leq (\frac{3}{4})^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{R}$ şi deoarece seria $\sum (\frac{3}{4})^n$ este convergentă, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcţii $\sum (\frac{3}{4})^n \theta(4^n x)$ converge uniform. Cum θ este continuă, deducem că şi f este continuă.

Vom arăta acum că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, f nu este derivabilă în x.

În acest scop vom fixa $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $m \in \mathbb{N}$, fie $k \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$k \leq 4^m x \leq k + 1.$$

Cu notaţiile

$$\alpha_m = \frac{k}{4^m}$$

şi

$$\beta_m = \frac{k+1}{4^m},$$

să observăm că:

i) $4^n \beta_m - 4^n \alpha_m$ este par, dacă $n > m$;

ii) $4^n \beta_m - 4^n \alpha_m = 1$, dacă $n = m$;

iii) între $4^n \alpha_m$ şi $4^n \beta_m$ nu există nici un întreg, dacă $n < m$.

Prin urmare

$$|\theta(4^n \beta_m) - \theta(4^n \alpha_m)| = \{ \begin{array}{cc} 0, & n > m \\ 4^{n-m}, & n \leq m \end{array},$$

de unde

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=0}^{m} (\frac{3}{4})^n [\theta(4^n \beta_m) - \theta(4^n \alpha_m)],$$

ceea ce implică

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq (\frac{3}{4})^m - \sum_{n=0}^{m-1} (\frac{3}{4})^n 4^{n-m} = \frac{1}{4^m} \cdot \frac{3^m + 1}{2} > \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4})^m,$$

i.e.

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

adică

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \cdot \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} + \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \cdot \frac{x - \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

de unde

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \cdot \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} \right| + \left| \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \cdot \frac{x - \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

deci

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \right| + \left| \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m, \tag{*}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$$\alpha_m \leq x \leq \alpha_m + \frac{1}{m} = \beta_m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_m = x. \tag{**}$$

Presupunând, prin reducere la absurd că f este derivabilă în x, folosind relaţiile $(*)$ şi $(**)$, obţinem, prin trecere la limită atunci când m tinde la ∞, contradicţia

$$2f^{'}(x) \geq \infty.$$

Observaţie. Amănunte privind tematica funcţiilor continue care nu sunt derivabile în nici un punct al axei reale se găsesc în *John C. Oxtoby*, **Measure and Category,** Springer-Verlag, 1971, paginile 45-46 şi *Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami*, **Mathematics of fractals**, Translation of Mathematical Monographs, volume 167, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993, paginile 11-14.

Exerciţii

1. Seria $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge uniform pe $[-1,1]$.
2. Seria $\sum x(1-x)^n$ nu converge uniform pe $[0,1]$.
3. Seria $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniform, dar nu absolut pe $\mathbb{R}$.
4. Seria $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.
5. Seria $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniform pe $[a,b] \subseteq (0,2\pi)$.
6. Seria $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ converge uniform pe $[0,1]$.
7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia continuă, periodică de perioadă 2, definită pe $[-1,1]$ prin

$$\theta(x) = \{ \begin{array}{cc} 1, & x \in [-1, -\frac{2}{3}] \\ -3x-1, & x \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}] \\ 0, & x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ 3x-1, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 1, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{array} .$$

Fie funcţiile $F, G : [-1,1] \to \mathbb{R}$, date de

$$F(x) = \sum \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n}x)$$

şi

$$G(x) = \sum \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n+1}x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Fie $H = (F,G) : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$.

Să se arate că F şi G sunt continue şi că

$$\operatorname{Im} H = [0,1] \times [0,1].$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

SERII DE PUTERI

Noţiunea de serie de puteri
Raza unei serii de puteri
Teorema Cauchy-Hadamard
Teorema de unicitate a seriilor de puteri
Teorema lui Bernstein
Teorema lui Abel si teorema lui Tauber

Seriile de puteri constituie o generalizare naturală a polinoamelor. Ele permit definirea riguroasă a funcţiilor elementare atât în cazul real (vezi paginile 21-214), cât mai ales în cazul complex (aşa cum se va vedea în cadrul cursului de Funcţii Complexe; a se vedea în acest sens *P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu*, **Analiză Matematică (Funcţii Complexe)**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, paginile 92-95).

Noţiunea de serie de puteri

Definiţie. *O serie de funcţii* $\sum f_n$*, unde* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, se numeşte serie de puteri, în jurul lui* c*, dacă pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*, există* $a_n \in \mathbb{R}$*, astfel ca* $f_n(x) = a_n(x-c)^n$*, pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*.*

Remarcă. *Fără a pierde din generalitate, putem presupune că* $c = 0$ *(căci translaţia* $x' = x - c$*, reduce o serie de puteri în jurul lui* c *la o serie de puteri în jurul lui* 0*).*

Deşi funcţiile $x \to a_n x^n$ *sunt definite pe* $\mathbb{R}$*, nu este de aşteptat ca seria* $\sum a_n x^n$ *să conveargă pe* $\mathbb{R}$*.*

De exemplu, seriile $\sum n! x^n$*,* $\sum x^n$ *şi* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converg pentru* x *aparţinând mulţimilor* $\{0\}$*,* $(-1, 1)$*, respectiv* $\mathbb{R}$*.*

Prin urmare, mulţimea punctelor în care converge o serie de puteri poate fi "mică", "medie" sau "mare".

Aşa cum vom vedea, o submulţime arbitrară a lui $\mathbb{R}$ *nu poate fi mulţimea punctelor de convergenţă ale unei serii de puteri.*

Raza unei serii de puteri. Teorema Cauchy-Hadamard

Definiţie. *Fie* $\sum a_n x^n$ *o serie de puteri.*

Dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit, considerăm* $\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
Dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ *este nemărginit, considerăm* $\rho = \infty$.
Definim raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum a_n x^n$ *ca fiind*

$$R = \{ \begin{array}{cc} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{array} .$$

Intervalul $(-R, R)$ *se numeşte intervalul de convergenţă al seriei de puteri* $\sum a_n x^n$*, iar mulţimea punctelor în care seria de puteri este convergentă se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

Rezultatul de mai jos justifică terminologia de rază de convergenţă.

Teorema Cauchy-Hadamard. *Dacă* R *este raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum a_n x^n$*, atunci seria este absolut convergentă pentru* $|x| < R$ *şi divergentă pentru* $|x| > R$.

Notă istorică. *Jacques Salomon Hadamard* s-a născut în 1865 în Franţa. A studiat la Lycée Charlemagne, unde conform propriilor spuse, excela la Latină şi Greacă, iar la aritmetică, până în clasa a V-a, era ultimul din clasă. Între 1875 şi 1876 urmează cursurile liceului Louis-le-Grand. Între 1884 şi 1888 Hadamard frecventează École Normale Supérieure. A predat la liceele din Saint-Louis şi la Lycée Buffon, avându-l ca student pe Fréchet. În 1892 obţine titlul de doctor în matematici. În acelaşi an primeşte Grand Prix des Sciences Mathématiques. În 1896 este numit profesor de astronomie şi mecanică raţională la Universitatea din Bordeaux. În decursul celor patru ani petrecuţi aici a obţinut însemnate rezultate din mai multe ramuri ale matematicii, anume teoria numerelor (a arătat, folosind tehnici din analiza complexă, că numărul numerelor prime mai mici sau egale cu n tinde la infinit la fel de repede ca şi $\frac{n}{\ln n}$), geometrie, algebră liniară, ecuaţii integrale, teoria codurilor etc. În 1897 este numit profesor la Facultatea de Ştiinţe de la Sorbona şi la College de France. În acelaşi an publică vestita carte intitulată Leçons de Géométrie Elémentaire. Obţine multe rezultate importante privind ecuaţiile cu derivate parţiale, optica, hidrodinamica, elasticitatea şi probabilităţile (lanţuri Markov) etc. În 1912 este numit profesor de analiză matematică la École Polytechnique. În acelaşi an este ales ca membru al Academiei de Ştiinţe. Doi dintre fiii lui au murit în luptă în primul război

mondial, iar un al treilea în cel de al doilea război mondial. În timpul celui de al doilea război mondial a fost profesor vizitator la Columbia University. A murit în 1963 la Paris.

Demonstraţie. Vom trata numai cazul $R \in (0, \infty)$, celelalte, anume $R = 0$ şi $R = \infty$, rămânând în seama cititorului.

Pentru $0 < |x| < R$, există $c \in [0, 1)$ astfel ca

$$|x| < cR.$$

Prin urmare

$$\rho < \frac{c}{|x|},$$

de unde deducem existeţa unui $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{|x|},$$

ceea ce echivalează cu

$$|a_n x^n| \leq c^n,$$

de unde, deoarece $c \in [0, 1)$, rezultă convergenţa absolută a serie de puteri $\sum a_n x^n$.

Dacă $|x| > R = \frac{1}{\rho}$, atunci, pentru o infinitate de n, avem

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x|},$$

adică

$$|a_n x^n| > 1,$$

de unde deducem că şirul $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge la 0, ceea ce implică faptul că seria de puteri $\sum a_n x^n$ este divergentă. $\square$

Observaţie. *Teorema Cauchy-Hadamard nu menţionează nimic despre ce se întâmplă în extremităţile intervalului de convergenţă. În fapt, orice situaţie poate să apară. Spre exemplu, pentru seriile $\sum x^n$, $\sum \frac{1}{n} x^n$ şi $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ raza de convergenţă este 1, dar prima serie nu converge nici în 1, nici în -1, cea de a doua converge în -1, dar nu converge în 1, iar cea de a treia converge atât în 1, cât şi în -1.*

Observaţie. *Raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum a_n x^n$*, în cazul în care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$*, este dată, de asemenea, de* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Rezultatul de mai jos afirmă convergenţa uniformă a seriilor de puteri pe mulţimile compacte conţinute în interiorul intervalului de convergenţă

Teoremă. *Fie* R *raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum a_n x^n$*, iar* K *o submulţime compactă a intervalului* $(-R, R)$.

Atunci seria de puteri $\sum a_n x^n$ *converge uniform pe* K.

Demonstraţie. Faptul că mulţimea K este compactă implică existenţa unei constante $c \in [0, 1)$, astfel ca

$$|x| < cR,$$

i.e.

$$\rho < \frac{c}{|x|}$$

pentru orice $x \in K - \{0\}$.

Prin urmare, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$|a_n x^n| \leq c^n,$$

pentru orice $x \in K$.

Criteriul lui Weierstrass (vezi pagina) încheie demonstraţia. $\square$

Rezultatul de mai jos arată că în interiorul intervalului de convergenţă al unei serii de puteri putem integra şi deriva termen cu termen.

Teoremă. *Fie* R *raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum a_n x^n$*, iar* $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$*, suma seriei de puteri (i.e.* $S(x) = \sum a_n x^n$*, pentru orice* $x \in (-R, R)$*).*

Atunci funcţia S *este continuă şi*

$$\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \sum a_n t^n dt = \sum a_n \int_a^b t^n dt,$$

pentru orice $a, b \in (-R, R)$.

Mai mult, seria de puteri $\sum (a_n x^n)'$ *are raza de convergenţă* R *şi*

$$S'(x) = (\sum a_n x^n)' = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1},$$

pentru orice $x \in (-R, R)$.

Observaţie. *Teorema anterioară nu menţionează situaţia capetelor intervalului de convergenţă.*

Dacă seria este convergentă în unul dintre capetele intervalului de convergenţă, atunci seria "derivată" poate sau nu să fie convergentă în acest punct. De exemplu, seria $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge în 1 şi în -1, dar seria $\sum \frac{x}{n}$ este convergentă în -1 şi divergentă în 1.

Corolar. *În condiţiile de mai sus, avem*

$$S^{(n)}(0) = n!a_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema de unicitate a seriilor de puteri. *Dacă seriile de puteri $\sum a_n x^n$ şi $\sum b_n x^n$ converg, pe un interval $(-r, r)$, către o aceeaşi funcţie, atunci*

$$a_n = b_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observaţie. *Seriile de puteri au avantajul că sunt facil de manipulat (sumele lor parţiale fiind polinoame) şi că au suma o funcţie derivabilă de o infinitate de ori, însă prezintă dezavantajul că (în general) o funcţie nu se reprezintă printr-o serie de puteri pe întreg domeniul de definiţie (spre exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, relaţia $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$, este valabilă numai pentru $|x| < 1$).*

Teorema lui Bernstein

Am văzut că o condiţie necesară ca o funcţie să fie suma, pe un interval $(-r, r)$, a unei serii de puteri, este ca funcţia să aibă derivate de orice ordin.

Această condiţie nu este şi suficientă.

De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right. ,$$

are în origine derivate de orice ordin, egale cu 0, dar nu există nici un interval $(-r, r)$ pe care ea să fie este suma unei serii de puteri.

Există câteva condiţii suficiente pentru ca o funcţie să poate fi scrisă ca o serie de puteri.

Spre exemplu, folosind teorema lui Taylor (vezi pagina), se poate arăta că dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M,$$

pentru orice $x \in (-r, r)$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, atunci seria de puteri $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, pe $(-r, r)$, către $f(x)$.

Teorema lui Bernstein. *Fie $f : [0, r] \to \mathbb{R}$ o funcţie care are derivate de orice ordin.*

Dacă f şi derivatele sale de orice ordin sunt pozitive, atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

pentru orice $x \in [0, r]$.

Demonstraţie. Conform teoremei lui Taylor cu restul sub forma integrală (vezi pagina), avem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

pentru orice $x \in [0, r]$ şi $n \in \mathbb{N}$, unde

$$R_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sx) ds.$$

Prin urmare

$$f(r) \geq \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds,$$

de unde, cum $f^{(n)}$ este crescătoare, avem

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds \leq f(r) (\frac{x}{r})^{n-1},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

de unde concluzia. $\square$

Teorema lui Abel si teorema lui Tauber

Am văzut că o serie de puteri converge uniform pe orice mulţime compactă din intervalul său de convergenţă.

Nu există motive pentru a crede, a priori, că acest fapt este valabil şi atunci când se consideră mulţimi compacte din mulţimea de convergenţă. Totuşi acest rezultat este valid, aşa cum arată următoarea:

Teorema lui Abel. *Dacă seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge, pe $(-R, R)$, către $f(x)$, iar seria $\sum a_n R^n$ converge către A, atunci seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge uniform pe $[0, R]$ şi*

$$\lim_{x\nearrow R} f(x) = A.$$

Demonstraţie. Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că $R = 1$.

Criteriul lui Abel (vezi pagina), cu $f_n \equiv a_n$ şi $\varphi_n(x) = x^n$, pentru orice $x \in [0, 1]$, asigură convergenţa uniformă pe $[0, 1]$.

Prin urmare, limita seriei de puteri, care este f, pe $[0, 1)$, este continuă, deci $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = A$. $\square$

Remarcă. *Acest rezultat sugerează un mod de a ataşa o limită unei serii care nu este convergentă.*

Spre exemplu, seriei $\sum b_n$ îi putem asocia seria de puteri $\sum b_n x^n$.

Dacă şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "nu creşte prea rapid", atunci seria de puteri $\sum b_n x^n$ converge către o funcţie $B : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

Dacă $\lim\limits_{x\nearrow 1} B(x) = \beta$, spunem că seria $\sum b_n$ este Abel convergentă către β.

Teorema lui Abel afirmă că dacă o serie este convergentă, atunci ea este Abel convergentă, iar sumele, cea obişnuită şi cea Abel, coincid.

Reciproca nu este valabilă aşa cum arată seria $\sum(-1)^n$; seria de puteri $\sum(-1)^n x^n$ are suma $\frac{1}{x+1}$, deci seria $\sum(-1)^n$ este divergentă, dar este Abel convergentă către $\frac{1}{2}$.

Teoremele care furnizează condiţii suficiente pentru ca o serie Abel convergentă să fie convergentă se numesc teoreme Tauberiene.

Teorema lui Tauber. *Dacă seria de puteri* $\sum a_n x^n$ *converge, pe* $(-1,1)$*, către* $f(x)$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ *şi* $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = A$*, atunci seria* $\sum a_n$ *converge către* A.

Notă istorică. *Alfred Tauber* (1866-1947) a studiat la Universitatea din Viena, unde a şi profesat. A fost şeful diviziei matematice a companiei de asigurări Phönix din Viena.

Demonstraţie. Pentru $x \in [0,1)$ avem

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = (\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x)) + (f(x) - A) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N=1}^{\infty} a_n x^n + (f(x) - A).$$

Deoarece pentru $x \in [0,1)$, avem

$$1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+....+x^n) < n(1-x),$$

obţinem

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n) \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n|.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = 0$, avem, conform cu teoremei de la pagina 176,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} n|a_n| = 0.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_\varepsilon$:

$$\sum_{n=0}^{N} n|a_n| < (N+1)\varepsilon,$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{N+1},$$

şi

$$|f(x_0) - A| < \varepsilon,$$

unde
$$x_0 = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Prin urmare, pentru un astfel de N, obţinem

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leq (1-x_0)\sum_{n=0}^{N} n\,|a_n| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n\right| + |f(x_0) - A| \leq$$

$$\leq (1-x_0)(N+1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{N+1}\frac{x_0^{N+1}}{1-x_0} + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

de unde concluzia. □

Exerciţii

1. Găsiţi razele de convergenţă şi mulţimile de convergenţă pentru seriile de puteri: $\sum x^n$, $\sum \frac{x^n}{n2^n}$, $\sum (\frac{n}{2n+1})^{2n-1} x^n$, $\sum \frac{n!}{n^n+1} x^n$.

2. Dezvoltaţi funcţia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ca sumă a unei serii de puteri ale lui $x - 1$.

3. Dezvoltaţi funcţiile $f(x) = e^x$, $g(x) = arctg(x)$, $h(x) = \arcsin(x)$, $s(x) = (1+x)ln(1+x)$, ca sumă a unei serii de puteri ale lui x.

4. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

REZUMAT

O serie de funcţii $\sum f_n$, unde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se numeşte serie de puteri, în jurul lui c, dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $a_n \in \mathbb{R}$, astfel ca $f_n(x) = a_n(x-c)^n$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, considerăm $\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit, considerăm $\rho = \infty$. Definim raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum a_n x^n$ ca fiind $R = \{ \begin{array}{ll} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{array}$. Intervalul $(-R, R)$ se numeşte intervalul de convergenţă al seriei de puteri $\sum a_n x^n$, iar mulţimea punctelor în care seria de puteri este convergentă se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.

Dacă R este raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, atunci seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$ şi divergentă pentru $|x| > R$.

Fie R raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum x^n$, iar K o submulţime compactă a intervalului $(-R, R)$. Atunci seria de puteri $\sum x^n$ converge uniform pe K.

Fie R raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, iar $S : (-R, R) \to R$, suma seriei de puteri (i.e. $S(x) = \sum a_n x^n$, pentru orice $x \in (-R, R)$). Atunci funcţia S este continuă şi $\int\limits_a^b S(t)dt = \int\limits_a^b \sum a_n t^n dt = \sum a_n \int\limits_a^b t^n dt$, pentru orice $a, b \in (-R, R)$. Mai mult, seria de puteri $\sum (a_n x^n)'$ are raza de convergenţă R şi $S'(x) = (\sum a_n x^n)' = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}$, pentru orice $x \in (-R, R)$. În condiţiile anterioare, avem $S^{(k)}(0) = k! a_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Dacă seriile de puteri $\sum a_n x^n$ şi $\sum b_n x^n$ converg, pe un interval $(-r, r)$, către o aceeaşi funcţie, atunci $a_n = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $f : [0, r] \to R$ o funcţie care are derivate de orice ordin. Dacă f şi derivatele sale de orice ordin sunt pozitive, atunci $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, pentru orice $x \in [0, r]$.

Dacă seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge, pe $(-R, R)$, către $f(x)$, iar seria $\sum a_n R^n$ converge către A, atunci seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge uniform pe $[0, R]$ şi $\lim\limits_{x \nearrow R} f(x) = A$.

Dacă seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge, pe $(-1, 1)$, către $f(x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n = 0$ şi $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = A$, atunci seria $\sum a_n$ converge către A.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

SERII TRIGONOMETRICE

Crisis in Mathematics: Fourier's Series

The crisis struck four days before Christmas 807. The edifice of calculus was shaken to its foundations. In retrospect, the difficulties had been building for decades. Yet while most scientists realized that something had happened, it would take fifty years before the full impact of the event was understood. The nineteenth century would see ever expanding investigations into the assumptions of calculus, an inspection and refitting of the structure from the footings to the pinnacle, so thorough a reconstruction that calculus was given a new name: Analysis. Few of those who witnessed the incident of 1807 would have recognized mathematics as it stood one hundred years later. The twentieth century was to open with a redefinition of the integral by Henri Lebesgue and an examination of the logical underpinninga of arithmetic by Bertrand Russell and Alfred North Whitehead, both direct consequentes of the events set in motion in that critical year.The crisis was precipitated by the deposition at the Institute de France in Paris of a manuscrpt, Theory of the Propagation of Heat in Solid Bodies, by the 39-year old prefect of the department od Isère, oseph Fourier. Fourier began his investigations with the problem of describing the flow of heat in a very long and thin rectangular plate or lamina. ... Fourier had reduced his problem to that of taking an even functin and expressing it as a possibly infinite sum of cosines, what we today call a Fourier series. His next step was to demonstrate how to accomplish this. Here was the crux of the crisis. Infinite sums of trigonometric functions had appeared before. Daniel Bernoulli (1700-1782) proposed such sums in 1753 as solutions to the problem of modeling the vibrating string. They had been summarily dismissed by the greatest mathematician of the time, Leonhard Euler (1707-1783). Perhaps Euler scented the danger they presented to his understanding of calculus. The committee that reviewed Fourier's manuscript: Laplace, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Sylvestre François Lacroix (1756-1843), and Gaspard Monge (1746-1818), echoed Euler's dismissal in an unenthusiastic summary written by Siméon Denis Poisson (1781-1840). Lagrange was later to make his objections explicit. Well into the 1820s, Fourier series would remain suspect because they contradicted the established wisdom about the nature of functions. Fourier did more that suggest that the solution to the heat equation lay in his trigonometric series. He gave a simple and practical means of finding those coefficients. In so doing, he produced a vast array of verifiable solutions to specific problems. Bernoulli's proposition could be debated endlessly with little effect for it was only theoretical.

Fourier's method could actually be implemented. It could not be rejected without forcing the question of why it seemed to work. There are problems with Fourier series, but they are subtler that anyone realized in that winter of 1807-08. It was not until the 1850s that Bernhard Riemann (1826-1866) and Karl Weierstrass (1815-1897) would sort out the confusion that had greeted Fourier and clearly delineate the real questions.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 1,3 şi 4.

Noţiunea de serie trigonometrică
Noţiunea de serie Fourier
Teoreme de reprezentare (Dirichlet, Fejér)

Noţiunea de serie trigonometrică

Seriile trigonometrice îşi dovedesc utilitatea în multe domenii (electrotehnica, mecanica undelor, reprezentarea semnalelor periodice etc).

Definiţie. *Pentru* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de numere reale, vom considera:*

· *funcţia* $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dată de*

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$*;*

· *funcţiile* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, date de*

$$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \cos nx,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$*, unde* $n \in \mathbb{N}$*.*

Se numeşte serie trigonometrică cu coeficienţii a_n *şi* b_m*, unde* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $m \in \mathbb{N}$, *seria de funcţii* $\sum\limits_n f_n$*.*

Sumele parţiale ale unei astfel de serii se numesc polinoame trigonometrice.

Observaţie. *Este suficient să studiem convergenţa unei serii trigonometrice pe intervalul* $[-\pi, \pi]$*.*

Rezultatul de mai jos ne arată modul în care putem exprima coeficienţii a_n şi b_m ai unei serii trigonometrice punctual convergente, în funcţie de suma sa.

Teoremă. *Dacă seria trigonometrică* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_n(a_n\cos nx+b_n\cos nx)$ *este punctual convergentă pe* $[-\pi,\pi]$ *(deci pe* $\mathbb{R}$*), iar* $S(x)$ *este suma acestei serii, atunci:*

i) Funcţia $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este periodică, de perioadă* 2π.

ii) Dacă, în plus, seria trigonometrică $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_n(a_n\cos nx+b_n\cos nx)$ *este uniform convergentă pe* $[-\pi,\pi]$, *atunci* S *este continuă pe porţiuni pe orice interval compact din* $\mathbb{R}$ *şi*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos nxdx$$

şi

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S(x)\sin mxdx,$$

pentru orice n *şi* m.

Noţiunea de serie Fourier

Definiţie. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe porţiuni pe orice interval compact din* $\mathbb{R}$ *şi periodică, de perioadă* 2π. *Fie şirurile de numere reale* $(a_n)_n$ *şi* $(b_m)_m$, *unde*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

şi

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx.$$

Atunci seria

$$\frac{a_0}{2}+\sum_n(a_n\cos nx+b_n\cos nx)$$

se numeşte seria Fourier a lui f, iar a_n şi b_m, se numesc coeficienţii Fourier ai lui f.

Notă istorică. *Jean Baptiste Joseph Fourier* s-a născut în 1768 la Auxerre, în Franţa. Din 1870 frecventează École Royale Militaire din Auxerre. În 1783 primeşte primul său premiu pentru un studiu de mecanică. În 1787 Fourier se dedică vieţii monahale, mergând la mănăstirea benedectină din St Benoit-sur-Loire. Interesul său pentru matematică este însă prezent şi în această perioadă. În 1790 devine profesor la École Royale Militaire din Auxerre. Conflictului său interior referitor la calea pe care o va urma (matematică sau teologie) i se adaugă un nou element, în 1793, când se implică în politică, alăturându-se Comitetului Revoluţionar local. Deşi datorită terorii generate de revoluţia Franceză doreşte să se retragă din astfel de activităţi, acest lucru este imposibil. Mai mult, pe motive politice este arestat. Din 1794 studiază la École Normale din Paris unde sunt profesori Lagrange, Laplace şi Monge. Predă la Collège de France şi la École Centrale des Travaux Publiques condusă de către Lazare Carnot şi Gaspard Monge, care curând îşi schimbă numele în École Polytechnique. În 1797 îi succede lui Lagrange la catedra de analiză şi mecanică. În 1798 se alătură armatei lui Napoleon în invazia Egiptului unde ocupă diverse poziţii administrative până în 1801 cînd se întoarce la postul de profesor de analiză de la École Polytechnique. La cererea lui Napoleon preia postul de prefect la Isère. Aceasta (1804-1807) este perioada în care lucrează la teoria propagării căldurii, rezultatul fiind memoriul intitulat "Despre propagarea căldurii în corpuri solide", memoriu de o importanţă capitală, dar care la vremea respectivă a fost foarte controversat. Lagrange şi Laplace au avut obiecţii asupra dezvoltării funcţiilor în serii trigonometrice. Din 1817 devine membru al Académie des Sciences. A murit în 1830.

Teoreme de reprezentare (Dirichlet, Fejér)

Observaţie. *Este posibil ca seria Fourier a unei funcţii f să fie divergentă. De asemenea, este posibil ca seria Fourier a unei funcţii f să fie punctual convergentă pe $\mathbb{R}$, dar suma ei să nu fie f.*

Vom prezenta în continuare un rezultat, anume teorema lui Dirichlet de reprezentare, care precizează condiţii suficiente pentru ca seria Fourier a unei funcţii f să conveargă punctual către f.

Pentru început vom introduce noţiunea de convoluţie a două funcţii.

Definiţie. *Pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ şi periodice, de perioadă 2π, funcţia $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de*

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se numeşte produsul de convoluţie al funcţiilor f şi g.

În continuare vom prezenta două leme.

Lemă. *Pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, fie*

$$D_n(x) = \frac{\sin(nx + \frac{x}{2})}{2\pi \sin \frac{x}{2}}$$

(*numit nucleul lui Dirichlet*).

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ şi periodică, de perioadă 2π şi dacă S_n reprezintă a n-a sumă parţială a seriei Fourier asociată lui f, atunci

$$S_n = f * D_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstraţie. Se poate constata uşor că

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx), \tag{*}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Atunci

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \cos kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)]dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = (f * D_n)(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, unde pentru justificarea penultimei egalităţi am folosit relaţia $(*)$.

Lema lui Riemann. *Dacă $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni, atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0.$$

Demonstraţie. După cum este binecunoscut, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie în scară $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Avem

$$\int_a^b f(x)\cos nx dx = \int_a^b \varphi(x)\cos nx dx + \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\cos nx dx,$$

de unde

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos nx dx\right| &\leq \left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx dx\right| + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,|\cos nx|\, dx < \\
&< \left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx dx\right| + \int_a^b \|f - \varphi\|\, dx < \left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx dx\right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm lema pentru funcţii în scară.

Aşadar presupunem că există o diviziune $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$ şi constantele c_0, c_1, ..., c_{m-1} astfel încât $f(x) = c_i$, pentru orice $x \in (x_{i-1}, x_i)$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Atunci

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\cos nx dx &= \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos nx dx = \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\sin nx_i - \sin nx_{i-1}}{n},
\end{aligned}$$

de unde

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx dx\right| \leq \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{m}|c_i|,$$

inegalitate care implică faptul că

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = 0.$$

Analog se arată că

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0.$$

Observaţie. *Prin urmare, şirurile coeficienţilor Fourier ai unei funcţii f converg către* 0.

Teorema lui Dirichlet de reprezentare. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă 2π, cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune f are derivate laterale finite.*

Atunci seria Fourier a lui f este punctual convergentă pe $\mathbb{R}$.

Mai precis,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_n(a_n\cos nx + b_n\cos nx) = \frac{\lim\limits_{\substack{u\to x\\ u<x}} f(u) + \lim\limits_{\substack{u\to x\\ u>x}} f(u)}{2}$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

şi

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx,$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $m \in \mathbb{N}$.

Schiţă de demonstraţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$, fie

$$m = \frac{\lim\limits_{u \nearrow x} f(u) + \lim\limits_{u \searrow x} f(u)}{2}.$$

Pentru $\delta \in (0, \pi)$ şi $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, avem

$$[D_n * (f - m)](x) =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t)-m)D_n(t)dt + \int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x-t)-m)D_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} (f(x-t)-m)D_n(t)dt.$$

Folosind cele două leme obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - m)D_n(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - m)D_n(t)dt = 0.$$

Există o constantă $C \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - m)D_n(t)dt \right| \leq \frac{C\delta \sup\limits_{|t| \leq \delta} \frac{|t|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|}}{\pi}.$$

Atunci, folosind această evaluare, deducem că

$$\lim_{n \to \infty} [D_n * (f - m)](x) = 0.$$

Dar, conform primei leme, avem

$$[D_n * (f - m)](x) = (D_n * f)(x) - m = S_n(x) - m,$$

de unde concluzia.

Corolar. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie periodică, de perioadă* 2π*, cu proprietatea că este continuă şi cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise* f *este derivabilă, iar în punctele de diviziune* f *are derivate laterale finite, atunci seria Fourier a lui* f *este punctual convergentă pe* $\mathbb{R}$ *către* f.

Un alt rezultat important privind seriile Fourier este următorul (pentru detalii vezi **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti*, paginile 132-134):

Teoremă. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă 2π, derivabilă, cu derivata continuă. Atunci seria Fourier a funcţiei f converge absolut şi uniform pe $\mathbb{R}$, suma sa fiind f.*

Un alt rezultat fundamental pentru teoria seriilor Fourier, rezultat care pune în evidenţă utilitatea conceptului de Cesàro sumabilitate (vezi pagina), este datorat lui Fejér (pentru demonstraţie se poate consulta *O. Stănăşilă*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981).

Teorema lui Fejér. *Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie continuă, periodică, de perioadă 2π, vom considera*

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_n}{n},$$

unde S_n rezprezintă a n-a sumă parţială a seriei Fourier asociată lui f, $n \in \mathbb{N}$.

Atunci şirul de funcţii $(\sigma_n)_n$, converge uniform, pe $\mathbb{R}$, către f.

Notă istorică. *Lipót Fejér* (numele său real este Leopold Weiss) s-a născut la Pécs, Ungaria, în 1880. Între 1897 şi 1902 a studiat matematica şi fizica la Budapesta şi Berlin unde a fost studentul lui Schwarz. Teorema referitoare la teoria seriilor Fourier care-i poartă numele, publicată în 1900, constituie baza tezei sale de doctorat pe care a susţinut-o în 1902 la Budapesta. Între 1902 şi 1905 predă la Universitatea din Budapesta, apoi, între 1905 şi 1911 la Koloszsvár (Cluj), iar din 1911 până la moartea sa, în 1959, din nou la Budapesta. Principalul său domeniu de studiu a fost analiza armonică, dar a publicat de asemenea un articol important despre funcţii întregi (împreună cu Carathéodory, în 1907) şi unul despre transformări conforme (împreună cu Riesz, în 1922).

Corolar. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică, de perioadă 2π, cu proprietatea că toţi coeficienţii săi Fourier sunt nuli.*

Atunci

$$f = 0.$$

Observaţie. *În cadrul cursului de Analiză Funcţională se vor studia seriile Fourier într-un cadru mai general, anume în contextul spaţiilor Hilbert (*a se vedea *Liliana Pavel,* ***An Introduction to Functional Analysis***, Editura Universităţii din Bucureşti, 2000, paginile 94-104*). Teoria seriilor Fourier constituie punctul de plecare al unei ramuri importante a Analizei Matematice, anume Analiza Armonică.*

Notă istorică. *David Hilbert* s-a născut în ianuarie 1862 la Königsberg, unde a urmat gimnaziul şi facultatea, obţinând titlul de doctor în 1885. Minkowski a fost unul dintre bunii lui prieteni. În 1885 se mută la Universitatea din Göttingen, unde rămâne până la sfîrşitul carierei. La început Hilbert a lucrat în teoria invarianţilor, descoperind celebra teoremă a bazei. Apoi atenţia lui s-a îndreptat către geometrie. Un studiu sistematic al axiomelor lui Euclid l-a condus la prezentarea geometriei sub formă axiomatică, abordare care a avut o imensă influenţă asupra acestui domeniu. La cel de al doilea congres al matematicienilor de la Paris a propus o listă de 23 de probleme, unele nerezolvate până astăzi. Studiile sale în domeniul ecuaţiilor diferenţiale au condus la noţiunea de spaţiu Hilbert. Printre studenţii săi amintim pe Weil şi Zermelo. A murit în februarie 1943, ca cetăţean de onoare al oraşului Königsberg.

Observaţie. *Seriile trigonometrice au avantajul că reprezentarea unei funcţii printr-o astfel de serie are loc pe orice interval, însă prezintă dezavantajul că sunt mai greu de manevrat (derivarea şi integrarea termen cu termen trebuie să se facă cu precauţii suplimentare).*

Exerciţii

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x$, pentru orice $x \in (-\pi, \pi)$, şi să se calculeze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^2$, pentru orice $x \in (0, 2\pi)$, şi să se calculeze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, 2\pi)$, şi să se calculeze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

Bibliografie

1. **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universităţii Bucureşti.*

2. *O. Stănăşilă*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

Definiţie. *Un spaţiu vectorial real H se numeşte prehilbertian dacă există o aplicaţie $\varphi : H \times H \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt satisfăcute proprietăţile:*

i) $\varphi(x,x) \geq 0$ *şi* $\varphi(x,x) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$

ii) $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

iii) $\varphi(x,y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$

iv) $\varphi(\lambda x,y) = \varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$.

$\varphi(x,y)$ *se mai notează* $< x, y >$ *iar* $< .,. >$ *se numeşte produs scalar.*

Observaţie. *În orice spaţiu prehilbertian H se poate dezvolta un limbaj geometric. Spre exemplu, $\|x\| \stackrel{def}{=} \sqrt{< x, x >}$ se numeşte lungimea vectorului x, $d(x,y) = \|x - y\|$ se numeşte distanţa dintre x şi y, iar pentru x şi y nenuli, deoarece $\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|} \in [-1,1]$, numărul $\phi \in [0,\pi]$ se numeşte unghiul vectorilor x şi y.*

Definiţie. *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente dintr-un spaţiu prehilbertian H se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte convergent dacă există $x \in H$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Definiţie. *Un spaţiu prehilbertian H se numeşte spaţiu Hilbert dacă orice şir Cauchy de elemente din H este convergent.*

Definiţie. *Fie H un spaţiu Hilbert real. O familie cel mult numărabilă $(e_n)_n$ de vectori din H se numeşte bază ortonormală a lui H dacă $< e_n, e_m >= \delta_{nm} \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1, & dacă\ n \neq m \\ 0, & dacă\ n = m \end{cases}$ şi spaţiul generat de familia $(e_n)_n$ este dens în H.*

Observaţie. *Nu orice spaţiu Hilbert real are bază ortonormală şi chiar dacă aceasta există, ea poate să nu fie bază de spaţiu vectorial.*

Definiţie. *Fie H un spaţiu Hilbert real şi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o bază ortonormală a sa. Pentru elementul $x \in H$, numerele reale $c_n =< x, e_n >$, $n \in \mathbb{N}$, se numesc coeficienţii Fourier ai lui x relativ la baza ortonormală $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teoremă. *Fie H un spaţiu Hilbert real şi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o bază ortonormală a sa.*

Atunci, pentru orice element $x \in H$, seria $\sum_n c_n e_n$ este convergentă (în H), iar suma sa este x.

În plus, seria $\sum_n c_n^2$ este convergentă, iar suma sa este $\|x\|^2$.

REZUMAT

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă pe porţiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ şi periodică, de perioadă 2π. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_n$ şi $(b_m)_m$, unde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ şi $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$. Atunci seria $\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \cos nx)$ se numeşte seria Fourier a lui f, iar a_n şi b_m, se numesc coeficienţii Fourier ai lui f.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă 2π, cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune f are derivate laterale finite. Atunci seria Fourier a lui f este punctual convergentă pe $\mathbb{R}$. Mai precis, $\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \cos nx) = \frac{\lim\limits_{u \nearrow x} f(u) + \lim\limits_{u \searrow x} f(u)}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ şi $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$.

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă 2π, cu proprietatea că este continuă şi cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune f are derivate laterale finite, atunci seria Fourier a lui f este punctual convergentă pe $\mathbb{R}$ către f.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă 2π, cu proprietatea că este continuă. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie S_n a n-a sumă parţială a seriei Fourier asociată lui f, iar $\sigma_n = \frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n}$. Atunci şirul de funcţii $(\sigma_n)_n$, converge uniform, pe $\mathbb{R}$, către f.

Bibliografie

Robert G. Bartle, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.